

EFEITO DE UM CAMPO ULTRASÔNICO SOBRE  
A DISSOLUÇÃO DE KCl EM ÁGUA

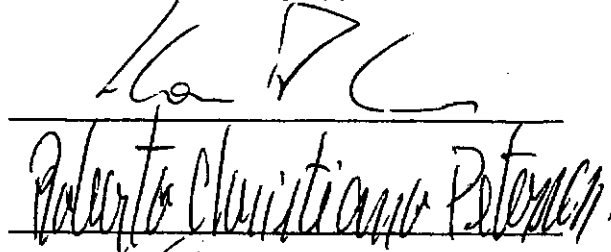
Francisco Paulo Lepore Neto

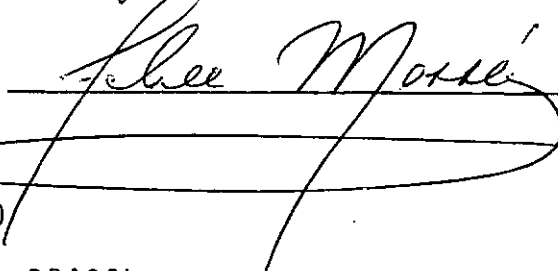
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS  
GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:



Presidente





RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

MARÇO DE 1974

A G R A D E C I M E N T O S

À CAPES, COPPE/UFRJ e FFEUnU.

Aos Professores Arthur Palmeira Ripper Neto pela indispensável orientação e Hans Ingo Weber pelo apoio e amizade.

À meus pais Armando e Nida.

Aos meus amigos Reny, Angelo e Francisco.

À Izaura pela sua ajuda valiosa.

RESUMO

Neste trabalho analisa-se o efeito do Vento Acústico sobre a difusão do  $KCl$  em água, em regime transitório.

Resultados experimentais mostram uma redução substancial no tempo necessário para ser atingida a saturação do sal na água.

Um modelo teórico é sugerido para a análise da circulação junto à interface água- $KCl$ . A equação do Vento Acústico é resolvida para a velocidade de transporte de massa.

Esta solução fornece um termo convectivo que é acoplado à equação da difusão.

ABSTRACT

An analysis is made of the effect of Acoustic Streaming upon the diffusion of  $KCl$  in water in a transient regime.

Experimental results show a substantial reduction of the saturation time for diffusion of the salt in water.

A theoretical model is suggested for the analysis of streaming adjacent to the water- $KCl$  interface. The equation of the acoustic streaming is solved for the mass transport velocity.

This solution gives a convective term to be added to the diffusion equation.

INDICE

RESUMO .....	iii
ABSTRACT .....	iv
CAP. I - INTRODUÇÃO .....	1
CAP. II - VENTO ACÚSTICO - REVISÃO DA TEORIA.	
2.1 - Equações Básicas .....	6
2.2 - Campo Acústico de Primeira Ordem .....	8
2.3 - Campo Acústico de Segunda Ordem - Equações do Vento Acústico .....	13
2.4 - Velocidade de Partícula ou de Transporte de Massa .....	19
CAP. III - O VENTO ACÚSTICO PRÓXIMO A UMA SUPERFÍCIE.	
3.1 - A região próxima a uma superfície rígida..	23
3.2 - Solução para o Campo Acústico de primeira ordem .....	25
3.3 - Solução para a equação do Vento Acústico próximo a uma superfície rígida .....	27
3.4 - A velocidade de transporte de Massa .....	31
CAP. IV - O VENTO ACÚSTICO E A DIFUSÃO .....	33
CAP. V - TRABALHO EXPERIMENTAL.	
5.1 - Montagem Experimental .....	36
5.2 - Preparação do Sal .....	36
5.3 - O Medidor de Concentração .....	39

5.4 - Banho Termostático .....	39
5.5 - Conjunto Gerador do Campo Acústico .....	40
5.6 - Experiência (i) - Difusão Natural do KCℓ em água em regime transitório .....	42
5.7 - Experiência (ii)- Difusão do KCℓ na água em regime transitório, sob o efeito do <u>Ven</u> to Acústico .....	42
5.8 - Análise dos Resultados .....	46
 CAP. VI - SUGESTÃO DE UM MODELO TEÓRICO.	
6.1 - A velocidade de Transporte de Massa .....	48
6.2 - Vento Acústico e Difusão .....	54
 CAP. VII - CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	56
 BIBLIOGRAFIA .....	59
 APENDICE A .....	61
 APENDICE B .....	63
 APENDICE C .....	66

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

A motivação deste trabalho provém do problema existente na mineração de Cloreto de Potássio, por via líquida, em jazidas subter<sub>ra</sub>neas.

Um processo básico de extração (1) está representado, esquematicamente, na Fig.(1a). A água é injetada por um duto enquanto a solução obtida é retirada por um outro para cristalização posterior.

Foram desenvolvidos, anteriormente, diversos processos de mineração com a finalidade de aumentar o rendimento da extração.

Há processos, como o mostrado na Fig.(1b), nos quais o tubo de injeção de água e o de captação da solução são colocados em pontos diferentes da cavidade (2). Em outros faz-se a dissolução seletiva do sal (3), ou ainda é promovida uma comunicação entre diversas cavidades (4), o que pode ser observado na Fig.(1c).

Estes processos têm o rendimento reduzido, quando as cavidades formadas pela dissolução do  $KCl$  atingem grandes dimensões. Neste estágio, o bombeamento da água não é suficiente para promover agitação junto às paredes de sal. A dissolução do  $KCl$  é feita, praticamente, por difusão natural.

O movimento da camada de solução saturada, que se encontra na interface sólido-líquido, se dá apenas por diferença de densidade, sendo este o motivo da lentidão do processo extrativo.

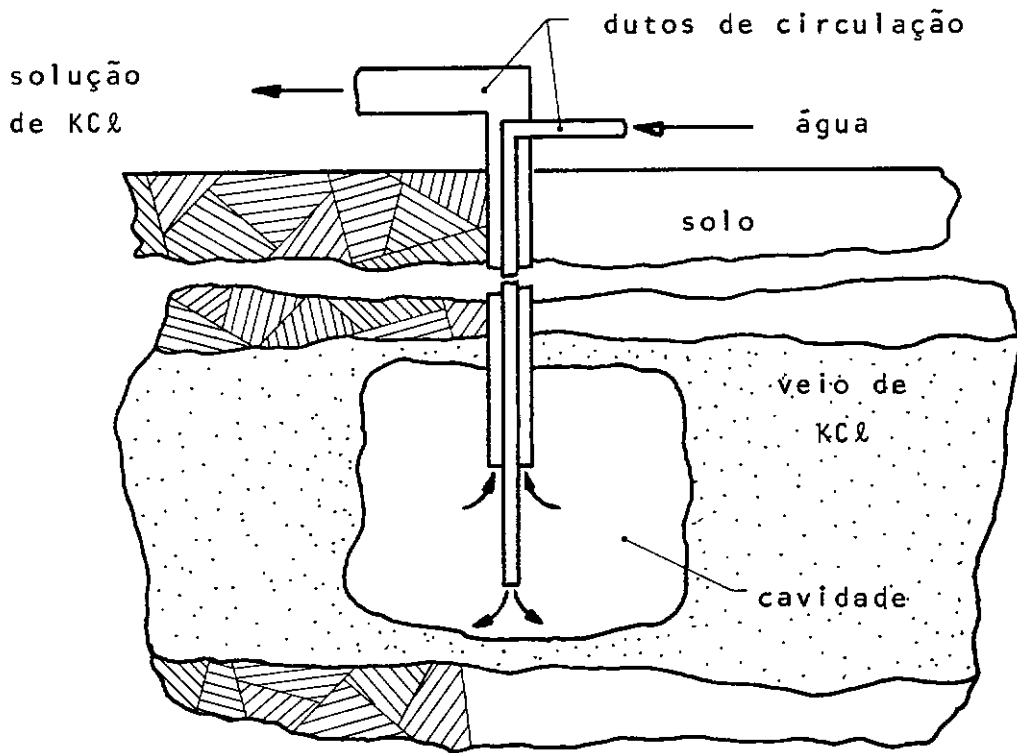


FIG. (1a) - Processo de Mineração do KCl.

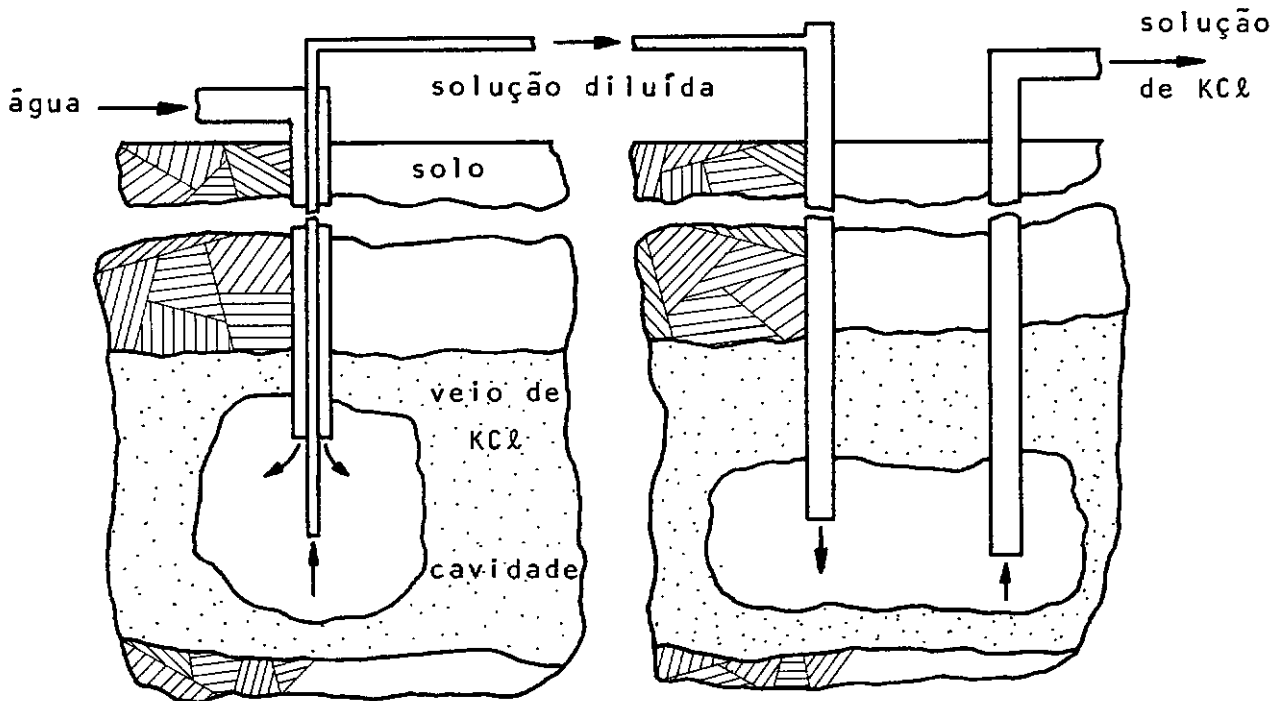


FIG. (1c) - Processo de Mineração do KCl.



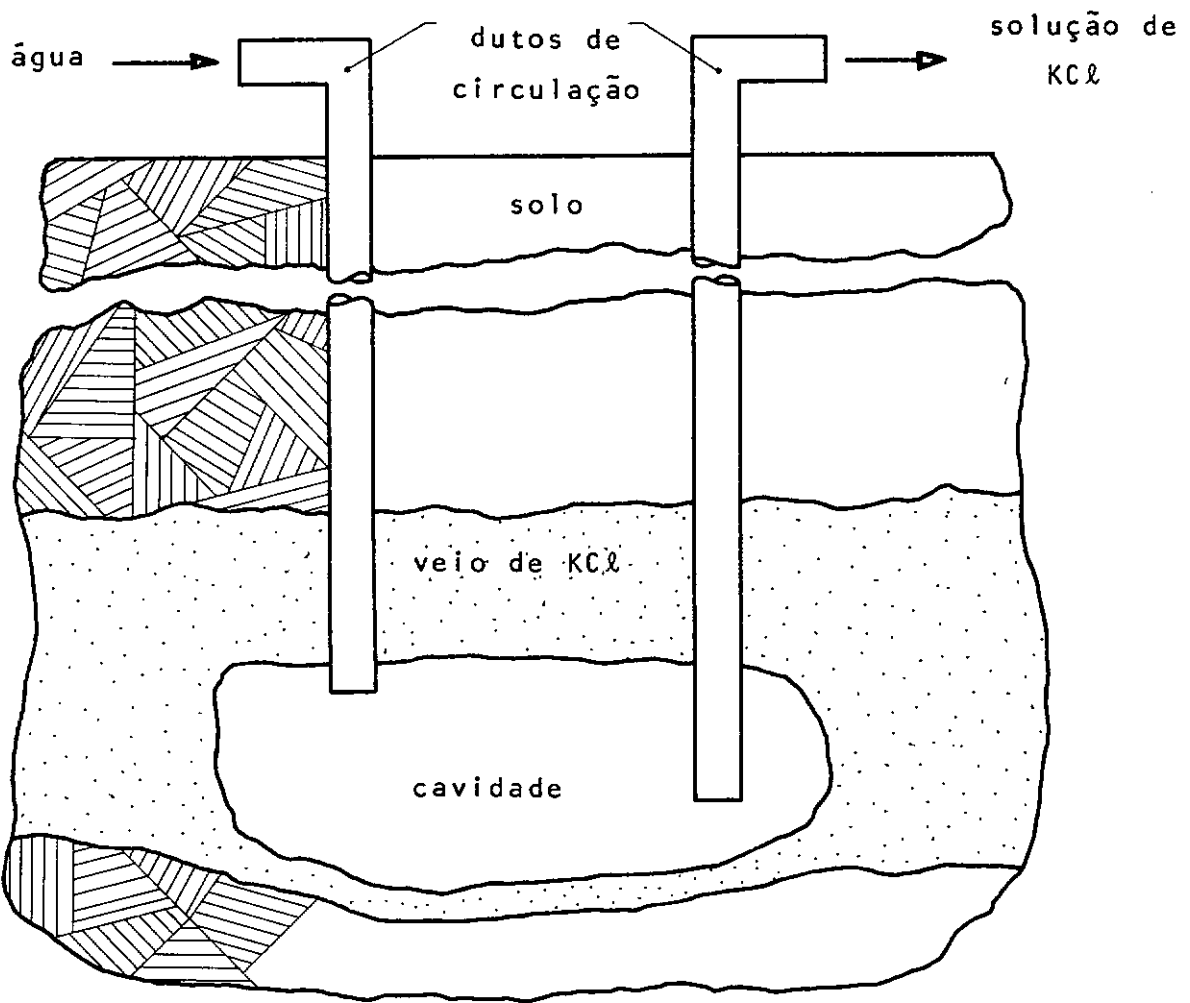


FIG. (1b) - Processo de Mineração do KCl.

Neste trabalho analisa-se a utilização do ultrassom como um processo acelerador da dissolução do sal. Este seria usado quando a agitação devida ao bombeamento não produzisse o mesmo efeito inicial.

Em princípio o ultrassom oferece duas alternativas para a solução do problema:

1) Promover a erosão da parede de sal através de Cavitação produzida por um campo acústico ultrasônico.

2) Promover uma Circulação na interface sólido-líquido pela ação do Vento Acústico, gerado por um campo acústico ultrasônico.

A Cavitação num meio líquido é produzida pela concentração local de alta energia proveniente do campo acústico. O seu efeito é muito usado industrialmente em processos de limpeza de superfícies.

É praticamente impossível produzir Cavitação num meio líquido quando a pressão estática existente é grande. Na mineração do KCl as cavidades encontram-se a grandes profundidades, podendo estar sujeitas a condições de alta pressão. Nesse caso torna-se difícil produzir cavitação.

Num meio fluido, além do movimento de vai-vem, provocado por um campo acústico, encontram-se circulações ou fluxos secundários que são independentes do tempo. Esse fluxo é denominado Vento Acústico.

O fenômeno do Vento Acústico foi inicialmente observado por Faraday (5), mas a primeira formulação matemática para o problema é devida a Lord Rayleigh (10).

Na presença de uma fronteira do meio fluido, o Vento Acús-

tico provoca uma circulação sempre tangente à superfície sólida, aparecendo no local, tensões viscosas estacionárias.

Estas tensões não são grandes, mas têm valor suficiente para promover aceleração em processos químicos, ou de transferência de calor ou de massa.

O Vento Acústico pode ser utilizado para gerar, junto à parede de sal, uma circulação que remova continuamente a camada de solução saturada, ali existente, aumentando a difusão do  $KCl$  na água.

Esta solução deve ser realizada em duas etapas. A primeira, assunto desta tese, analisa o Vento Acústico como um processo físico acelerador da dissolução do sal.

A outra etapa corresponde ao projeto de um transdutor que produza energia suficiente para gerar o Vento Acústico e cujas dimensões possibilitem a sua colocação no interior da cavidade através dos dutos de circulação. Esta parte foi deixada para ser desenvolvida em trabalhos posteriores.

## CAPÍTULO II

### VENTO ACÚSTICO - REVISÃO DA TEORIA

#### 2.1 - Equações Básicas.

Faraday (5) observou, inicialmente, o Vento Acústico quando estudava a vibração de placas. Posteriormente, Andrade (6), Holtzmark (7) e Nyborg (8) analisaram o movimento do meio fluido próximo a cilindros e esferas pulsantes, enquanto Jackson (9) estudou o problema na região entre um plano rígido e o extremo de uma barra vibrando longitudinalmente.

A análise usual do campo acústico é desenvolvida através de aproximações de primeira ordem da equação geral do campo, não fornecendo a justificativa teórica para o Vento Acústico.

Rayleigh (10) desenvolveu o primeiro estudo teórico para o campo acústico não linear, utilizando aproximações até segunda ordem na equação geral do campo, justificando o fenômeno do Vento Acústico.

Para a dedução da equação geral do campo acústico (11) considera-se um meio fluido homogêneo e isotrópico onde a pressão, velocidade, e a densidade em descrição espacial são dadas instantaneamente por  $p = p(x,y,z,t)$ ,  $\underline{u} = \underline{u}(x,y,z,t)$  e  $\rho = \rho(x,y,z,t)$ , respectivamente.

Seja um elemento do meio fluido no qual agem apenas tensões superficiais devido a elasticidade e viscosidade do fluido. Então a equação dinâmica fica:

$$\underline{f} = \rho \left[ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \right] \quad (2.1.1)$$

O vetor  $\underline{f}$  representa a força líquida por unidade de volume, sendo dada por:

$$\underline{f} = -\nabla p + \left[ \mu' + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u} \quad (2.1.2)$$

Na eq. (2.1.2)  $\mu$  e  $\mu'$  são, respectivamente, os coeficientes de viscosidade transversal (shear) e volumétrica (bulk), considerados, aqui, como independentes do tempo.

A equação da continuidade é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \quad (2.1.3)$$

Como  $\frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} = \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ , da eq. (2.1.3) vem:

$$\frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} = \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \underline{u} \nabla \cdot (\rho \underline{u})$$

$$\text{ou} \quad \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \underline{u} \nabla \cdot (\rho \underline{u}) \quad (2.1.4)$$

Combinando às eqs. (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.4), obtém-se a equação geral do campo acústico:

$$\begin{aligned} -\nabla p + \left[ \mu' + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u} = \\ = \frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \rho(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \underline{u}(\nabla \cdot \rho \underline{u}) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

## 2.2. Campo Acústico de Primeira Ordem.

Vamos restringir a generalidade da eq. (2.1.5) fazendo aproximações apropriadas para um campo acústico estacionário.

Sendo  $p_0$  e  $\rho_0$ , grandezas estáticas no meio fluido, os excessos de pressão e densidade podem ser representadas por:

$$p - p_0 = p_1 \quad \text{e} \quad \rho - \rho_0 = \rho_1, \quad (2.2.1)$$

enquanto a velocidade  $\underline{u} = \underline{u}_1$ .

As funções  $p_1$ ,  $\rho_1$  e  $\underline{u}_1$  são periódicas, de frequência  $\omega$  e especificam o campo acústico de primeira ordem usualmente conhecido.

De acordo com as suposições feitas,  $p_1$ ,  $\rho_1$  e as componentes de  $\underline{u}_1$  podem ser expressas pela parte real de um complexo da forma  $(A + iB) \exp(i\omega t)$ , devendo satisfazer a eq. (2.1.5) e uma equação de estado a ser suposta.

Markham (12) considerou a equação de estado, em primeira ordem, da forma:

$$-p_1 = c^2 \rho_1 + R \dot{\rho}_1 \quad (2.2.2)$$

Na eq. (2.2.2)  $c$  é a velocidade de propagação da onda compressional e  $R = R(\omega)$  é função do relaxamento. O termo  $R$  afeta a equação do campo acústico de primeira ordem na forma de um aumento em  $\mu'$ , como será mostrado a seguir.

Para a obtenção da equação do campo acústico de primeira ordem, substitui-se a eq. (2.2.1) nas eqs. (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.3).

De acordo com as eqs. (2.2.1) e (2.1.2):

$$\underline{f}_1 = - \nabla(p_1 + p_0) + \left[ \mu' + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u}_1 - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u}_1$$

Como  $p_0$  é constante,

$$\underline{f}_1 = - \nabla p_1 + \left[ \mu' + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u}_1 - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u}_1 \quad (2.2.3)$$

Tomando-se o gradiente da eq. (2.2.2) e como  $\rho_0$  é constante, tem-se:

$$- \nabla p_1 = c^2 \nabla \rho_1 + R \nabla \dot{\rho}_1 \quad (2.2.4)$$

Substituindo-se  $- \nabla p_1$ , dado pela eq. (2.2.4), na eq. (2.2.3):

$$\underline{f}_1 = c^2 \nabla \rho_1 + R \nabla \dot{\rho}_1 + \left[ \mu' + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u}_1 - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u}_1 \quad (2.2.5)$$

A equação da continuidade (2.1.3) de acordo com as eqs. (2.2.1), fica:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1) + \nabla \cdot (\rho_0 + \rho_1) \underline{u}_1 = 0$$

$$\text{ou} \quad \dot{\rho}_1 + \rho_0 \nabla \cdot \underline{u}_1 = 0 \quad (2.2.6)$$

O termo  $\nabla \cdot \rho_1 \underline{u}_1$  é desprezado por ser de segunda ordem.

Combinando a eq. (2.2.6) com a eq. (2.2.5):

$$\underline{f}_1 = c^2 \nabla \rho_1 + \left[ \rho_0 R + \mu' + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u}_1 - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u}_1 \quad (2.2.7)$$

Como foi mencionado anteriormente, o termo em  $R$  na eq. (2.2.2) afeta a equação do campo acústico de primeira ordem na forma de um aumento em  $\mu'$ . Assim a eq. (2.2.7) pode ser simplesmente representada por:

$$\underline{f}_1 = c^2 \nabla \rho_1 + \left[ \bar{\mu}' + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u}_1 - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u}_1 \quad (2.2.8)$$

Considerando a aproximação de primeira ordem para a eq. (2.1.1):

$$\underline{f}_1 = (\rho_0 + \rho_1) \left[ \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} + (\underline{u}_1 \cdot \nabla) \underline{u}_1 \right]$$

Mantendo os termos até primeira ordem:

$$\underline{f}_1 = \rho_0 \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} \quad (2.2.9)$$

Finalmente, a equação do campo acústico de primeira ordem é obtida combinando as eqs. (2.2.8) e (2.2.9):

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} = -c^2 \nabla \rho_1 + \left[ \bar{\mu}' + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u}_1 - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u}_1 \quad (2.2.10)$$

É possível obter a eq. (2.2.10) apenas em termos de  $\underline{u}_1$ , se for levado em consideração a suposição que  $\rho_1$ ,  $p_1$  e as componentes de  $\underline{u}_1$  são funções periódicas e podem ser expressas pela parte real de um complexo  $(A + iB) \exp(i\omega t)$ . Assim, a eq. (2.1.3):

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \underline{u}_1 = 0, \quad \text{toma a forma:}$$

$$i\omega \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \underline{u}_1 = 0 \quad (2.2.11)$$



Tomando o divergente da eq. (2.2.11):

$$\nabla \rho_1 = - \frac{\rho_0}{i\omega} \nabla \nabla \cdot \underline{u}_1 \quad (2.2.12)$$

De acordo com a suposição feita, o termo  $\rho_0 \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t}$  da eq.

(2.2.10), fica:

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} = \rho_0 i\omega \underline{u}_1 \quad (2.2.13)$$

Substituindo-se as eqs. (2.2.12) e (2.2.13) na eq.(2.2.10) e multiplicando-se ambos os membros por  $\frac{2i}{\omega\rho_0}$  :

$$\begin{aligned} - 2\underline{u}_1 = & \left\{ \frac{2c^2}{\omega^2} + \left[ \bar{\mu}' + \frac{4}{3} \mu \right] \frac{2i}{\omega\rho_0} \right\} \nabla \nabla \cdot \underline{u}_1 - \\ & - \frac{2i\mu}{\omega\rho_0} \nabla \times \nabla \times \underline{u}_1 \end{aligned}$$

Fazendo  $k = \frac{\omega}{c}$  ,  $\beta^2 = \frac{\omega\rho_0}{2\mu}$  e  $\mu b = \bar{\mu}' + \frac{4}{3} \mu$ , onde  $\bar{\mu}' = \mu' +$

$+ \rho_0 R$  , a equação anterior toma a forma:

$$\left[ 2k^{-2} + i b\beta^{-2} \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u}_1 + 2\underline{u}_1 = i\beta^{-2} \nabla \times \nabla \times \underline{u}_1 \quad (2.2.14)$$

A eq. (2.2.14) pode ser simplificada observando que  $\beta \gg k$  e  $b \approx 1$  para uma larga faixa da frequência  $\omega$  e para diferentes valores de  $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$  .

O termo entre parenteses na eq. (2.2.14) pode ser aproximado por:

$$2k^{-2} + i b\beta^{-2} = 2(k - i\alpha)^{-2} , \text{ onde}$$

$$\alpha = \frac{bk^3}{4\beta^2} = \frac{k^2 \mu b}{2\rho_0 c}$$

Se  $\beta \gg k$  então  $\alpha \ll k$ .

A equação do campo acústico de primeira ordem fica:

$$2(k - i\alpha)^{-2} \nabla \nabla \cdot \underline{u}_1 + 2\underline{u}_1 = i\beta^{-2} \nabla \times \nabla \times \underline{u}_1 \quad (2.2.15)$$

A solução da eq. (2.2.15) especifica o campo acústico de primeira ordem.

Quando um "feixe ultrasônico" se propaga, como ondas de compressão, em um meio infinito, a velocidade  $\underline{u}_1 = \underline{u}_{1a}$  é irrotacional. Então, se  $\nabla \times \underline{u}_{1a} = 0$ , a eq. (2.2.15), fica:

$$\nabla \nabla \cdot \underline{u}_{1a} = \nabla^2 \underline{u}_{1a} = - (k - i\alpha)^2 \underline{u}_{1a} \quad (2.2.16)$$

Num problema com a presença de ondas solenoidais, a velocidade  $\underline{u}_1 = \underline{u}_{1b}$  é divergente-livre. Então, se  $\nabla \cdot \underline{u}_{1b} = 0$ , a eq. (2.2.15), fica:

$$-\nabla \times \nabla \times \underline{u}_{1b} = \nabla^2 \underline{u}_{1b} = -2i\beta^2 \underline{u}_{1b}$$

Fazendo  $m = (1 + i)\beta$  a equação anterior toma a forma:

$$-\nabla \times \nabla \times \underline{u}_{1b} = \nabla^2 \underline{u}_{1b} = m^2 \underline{u}_{1b} \quad (2.2.17)$$

De um modo geral, o vetor  $\underline{u}_1$  pode ser sempre expresso pela soma de uma parte irrotacional e uma solenoidal.

Através das soluções das eqs. (2.2.16) e (2.2.17), fica especificado o campo acústico de primeira ordem em termos de:

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_{1a} + \underline{u}_{1b} \quad (2.2.18)$$

A velocidade, expressa na eq. (2.2.18) satisfaz a eq. (2.2.15) e, dependendo de cada problema específico, deve cumprir determinadas condições de contorno.

### 2.3 - Campo Acústico de Segunda Ordem - Equações do Vento Acústico.

Como mencionado anteriormente, as aproximações de primeira ordem para a equação geral do campo acústico não justificam o aparecimento do Vento Acústico.

Para a obtenção da equação do Vento Acústico é necessário considerar termos de segunda ordem nas expansões em série da pressão, densidade e velocidade no meio fluido:

$$p - p_0 = p_1 + p_2, \quad \rho - \rho_0 = \rho_1 + \rho_2 \quad e$$

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \quad (2.3.1)$$

Nas eqs. (2.3.1) os termos de índice um têm o mesmo significado dado na seção (2.2), enquanto as grandezas de segunda ordem  $p_2$ ,  $\rho_2$  e  $\underline{u}_2$ , representam um nível constante para a pressão, densidade e velocidade, sendo independentes do tempo. Para exemplificar a pressão está representada graficamente na Fig. (2).

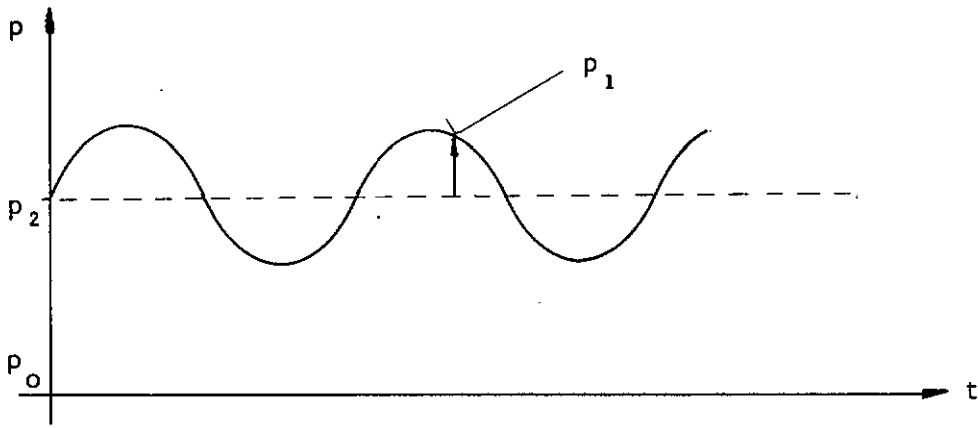


FIG. (2) - Representação gráfica de  $p - p_0 = p_1 + p_2$  .

Substituindo as eqs. (2.3.1) na eq. (2.1.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1 + \rho_2)(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) + (\rho_0 + \rho_1 + \rho_2) \left[ (\underline{u}_1 + \underline{u}_2) \cdot \nabla \right] (\underline{u}_1 + \underline{u}_2) + (\underline{u}_1 + \underline{u}_2) \nabla \cdot (\rho_0 + \rho_1 + \rho_2)(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = - \nabla(p_0 + p_1 + p_2) + \left[ \mu' + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot (\underline{u}_1 + \underline{u}_2) - \mu \nabla \times \nabla \times (\underline{u}_1 + \underline{u}_2) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

No desdobramento da equação (2.3.2) aparecem termos da forma  $\rho_i(\underline{u}_j \cdot \nabla) \underline{u}_k$  e  $\rho_i \underline{u}_j (\nabla \cdot \underline{u}_k)$ . A ordem de tais termos é dada pela soma  $(i + j + k)$ , com  $i, j$  e  $k = 0, 1$  ou  $2$ .

Retendo os termos até segunda ordem e lembrando que as grandezas de índice 2 e 0 são independentes do tempo, vem:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1 + \rho_2)(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 \underline{u}_1) + \rho_0 \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} \quad (2.3.2a)$$

$$\begin{aligned}
 (\rho_0 + \rho_1 + \rho_2) \left[ (\underline{u}_1 + \underline{u}_2) \cdot \nabla \right] (\underline{u}_1 + \underline{u}_2) &= \\
 &= \rho_0 (\underline{u}_1 \cdot \nabla) \underline{u}_1
 \end{aligned} \tag{2.3.2b}$$

$$\begin{aligned}
 (\underline{u}_1 + \underline{u}_2) \cdot \nabla (\rho_0 + \rho_1 + \rho_2) (\underline{u}_1 + \underline{u}_2) &= \\
 &= \rho_0 \underline{u}_1 \cdot \nabla \underline{u}_1
 \end{aligned} \tag{2.3.2c}$$

$$\nabla(\rho_0 + \rho_1 + \rho_2) = \nabla \rho_1 + \nabla \rho_2 \tag{2.3.2d}$$

Levando as equações de (2.3.2a) a (2.3.2d) na eq. (2.3.2e) agrupando, no primeiro membro, os termos lineares de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
 \rho_0 \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} + \nabla p_1 - \left[ \mu' + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u}_1 + \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u}_1 &= \\
 = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 \underline{u}_1) - \rho_0 \left[ (\underline{u}_1 \cdot \nabla) \underline{u}_1 + \underline{u}_1 (\nabla \cdot \underline{u}_1) \right] - \\
 - \nabla p_2 + \left[ \mu' + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u}_2 - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u}_2
 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

O primeiro membro da eq. (2.3.3) é a soma algébrica dos termos da equação do campo acústico de primeira ordem, sendo, portanto igual a zero. Com essa consideração:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 \underline{u}_1) &= - \rho_0 \left[ (\underline{u}_1 \cdot \nabla) \underline{u}_1 + \underline{u}_1 (\nabla \cdot \underline{u}_1) \right] - \\
 &- \nabla p_2 + \left[ \mu' + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u}_2 - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u}_2
 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Tomando a média no tempo, sobre um número suficiente de ciclos sônicos, dos termos da eq. (2.3.4), tem-se que:

$$\langle \underline{u}_2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \underline{u}_2 \, dt = \underline{u}_2 ,$$

pois  $\underline{u}_2$  é independente do tempo. Pela mesma razão  $\langle p_2 \rangle = p_2$ .

Como as grandezas de primeira ordem no campo acústico estacionário, são periódicas:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 \underline{u}_1) \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 \underline{u}_1) \, dt = 0$$

Essa conclusão pode ser observada na Fig. (3).

De acordo com tais considerações, a eq. (2.3.4), fica:

$$\nabla p_2 + \rho_0 \left\langle (\underline{u}_1 \cdot \nabla) \underline{u}_1 + \underline{u}_1 (\nabla \cdot \underline{u}_1) \right\rangle = \left[ \mu' + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u}_2 - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u}_2$$

ou  $\nabla p_2 - \underline{F} = \left[ \mu' + \frac{4}{3} \mu \right] \nabla \nabla \cdot \underline{u}_2 - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u}_2 \quad (2.3.5)$

com  $\underline{F} = \rho_0 \left\langle (\underline{u}_1 \cdot \nabla) \underline{u}_1 + \underline{u}_1 (\nabla \cdot \underline{u}_1) \right\rangle$

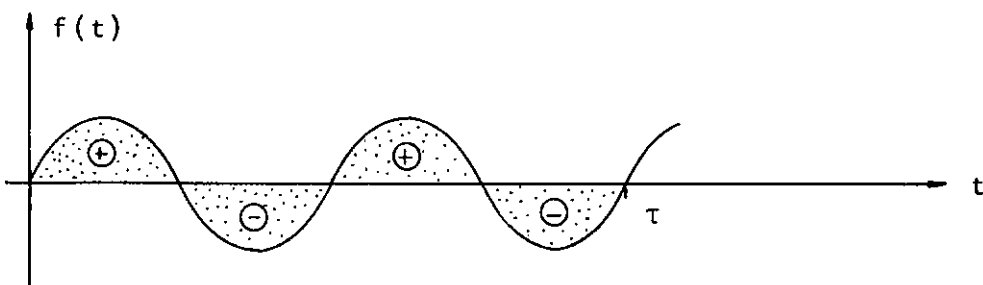


FIG. (3)

A eq. (2.3.5) é a equação do campo acústico de segunda ordem, onde  $\underline{u}_2$  e  $p_2$  são, respectivamente, a velocidade e a pressão associadas com a circulação gerada no meio fluido, pela ação do Vento Acústico.

O vetor  $\underline{F}$ , separado na eq. (2.3.5), é formado por combinações não lineares de termos de primeira ordem. Fisicamente,  $\underline{F}$  é um campo de forças associado com a média no tempo da taxa de acréscimo da quantidade de movimento de um elemento de fluido.

Na eq. (2.2.10), correspondente ao campo acústico de primeira ordem, aparece a variação de quantidade de movimento, mas o vetor  $\underline{F} \equiv 0$  por ser uma grandeza de segunda ordem. Essa discrepância desaparece quando são consideradas aproximações de segunda ordem na equação do campo acústico, sendo restabelecido o balanço dinâmico.

A eq. (2.3.5) tem a forma básica da equação para um fluxo lento de um fluido viscoso, causado por um campo de forças externo.

Dessa forma, o comportamento qualitativo das circulações associadas ao Vento Acústico, pode ser visualizado fazendo uso da correspondência entre o vetor  $\underline{F}$  e o campo de forças externo agindo sobre um fluido viscoso, sem a presença do campo acústico.

Essa analogia pode ser usada para a obtenção de soluções formais da equação do Vento Acústico. Então, as funções  $p_2$  e  $\underline{u}_2$ , que satisfazem a eq. (2.3.5), para um determinado campo acústico de primeira ordem, com seu vetor  $\underline{F}$  associado, podem ser obtidas diretamente da solução do problema de um fluxo viscoso lento provocado por um campo de forças externo, idêntico a  $\underline{F}$ , e sujeito as mesmas

condições de contorno do problema acústico.

A eq. (2.3.5) pode ser colocada em formas diferentes de modo a facilitar sua solução.

Tomando o rotacional da eq. (2.3.5) e observando que  $\nabla \cdot \underline{u}_2 = 0$ , o que é coerente, pois não há variação de volume associado com  $\underline{u}_2$ , vem:

$$\nabla \times (\nabla p_2) - \nabla \times \underline{F} = - \mu \nabla \times \left[ \nabla \nabla \cdot \underline{u}_2 - \nabla^2 \underline{u}_2 \right]$$

Como o rotacional do gradiente de um escalar é nulo:

$$- \nabla \times \underline{F} = \mu \nabla \times (\nabla^2 \underline{u}_2)$$

$$\text{ou} \quad - \nabla \times \underline{F} = \mu \nabla^2 (\nabla \times \underline{u}_2) \quad (2.3.6)$$

A forma da equação do Vento Acústico, dada na eq. (2.3.6), não apresenta  $p_2$  explicitamente. A sua solução é em termos de  $\underline{u}_2$  com componentes  $(u_2, v_2, w_2)$  em relação a um sistema de coordenadas  $(x, y, z)$ .

Algumas vezes, o conhecimento de  $p_2$  é necessário na forma de uma condição de contorno para a velocidade  $\underline{u}_2$ .

Uma outra forma para a equação de segunda ordem pode ser obtida quando se sabe, previamente, que a componente  $v_2 = 0$ . Nesse caso,  $\underline{u}_2 = \underline{u}_2(u_2, 0, w_2)$ .

Utilizando o fato de  $\nabla \cdot \underline{u}_2 = 0$ :

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = - \frac{\partial w_2}{\partial z}$$



Em alguns casos pode-se representar  $\underline{u}_2$  em termos da função de Stokes  $\psi_2 = \psi_2(x, z)$ , que é uma diferencial exata. Assim a eq. (2.3.6) toma a forma:

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi_2 \underline{n}_y = - \nabla \times \underline{F} \quad (2.3.7)$$

com  $\underline{n}_y$  indicando um vetor unitário na direção  $y$ , e

$$u_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \quad w_2 = - \frac{\partial \psi_2}{\partial x}$$

Em experiências sobre o Vento Acústico, geralmente se determina a circulação, observando a velocidade de pequenas partículas colocadas no meio fluido onde o fenômeno ocorre.

O procedimento é idêntico quando se deseja estabelecer a relação entre a circulação e um transporte de massa.

Nas duas situações mencionadas, o que se deseja determinar é uma velocidade de partícula. Como  $\underline{u}_2$ , obtida pela solução das eqs. (2.3.5), (2.3.6) e (2.3.7), dá uma descrição espacial da velocidade de circulação, é necessário promover a mudança para uma representação material.

## 2.4 - Velocidade de Partícula ou Velocidade de Transporte de Massa

Num problema de Vento Acústico é, às vezes, útil especificar a média no tempo da razão  $M$  na qual a massa flue através de uma determinada superfície  $S$ .

Para um fluido de densidade  $\rho$  e velocidade  $\underline{u}$ :

$$M = \int_S \langle \rho \underline{u} \rangle \cdot d\underline{S} \quad (2.4.1)$$

Fazendo aproximações até segunda ordem para a densidade e a velocidade, a eq. (2.4.1), fica:

$$M = \int_S \left\langle \rho_0 \underline{u}_2 + \rho_1 \underline{u}_1 \right\rangle \cdot d\underline{S} \quad \text{ou}$$

$$\frac{M}{\rho_0} = \int_S \left\langle \underline{u}_2 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \underline{u}_1 \right\rangle \cdot d\underline{S} \quad (2.4.2)$$

$$\text{Representando } \underline{U} = \underline{u}_2 + \underline{u}_T, \quad (2.4.3)$$

com  $\underline{u}_T = \rho_0^{-1} \left\langle \rho_1 \underline{u}_1 \right\rangle$ , a eq. (2.4.2) toma a forma:

$$\frac{M}{\rho_0} = \int_S \underline{U} \cdot d\underline{S} \quad (2.4.4)$$

Na eq. (2.4.4),  $\underline{U}$  representa a velocidade de transporte de massa ou a velocidade de partícula.

No Vento Acústico estacionário, não há ganho ou perda líquida de massa em uma região fechada  $S$ , então:

$$\oint_S \underline{U} \cdot d\underline{S} = 0 \quad (2.4.5)$$

Uma vez que a eq. (2.4.5) se aplica a qualquer superfície fechada  $S$ , de acordo com a teoria vetorial:

$$\nabla \cdot \underline{U} = 0 \quad (2.4.6)$$

As eqs. (2.4.4), (2.4.5) e (2.4.6) representam as propriedades da velocidade de partícula, enquanto as eqs. (2.4.3) relacionam  $\underline{U}$  com  $\underline{u}_2$ , ou seja, estabelecem a mudança da descrição espacial para a descrição material da velocidade.

Essa transformação é feita através de  $\underline{u}_T$  que pode ser expresso por  $\underline{u}_T = \rho_0^{-1} \langle \rho_1 \underline{u}_1 \rangle$ , ou ser determinado da seguinte forma.

Sejam P e Q dois pontos do meio fluido. Na Fig.(4),  $\underline{\epsilon}$  é o vetor posição de Q relativo a P e define uma vizinhança para o ponto P.

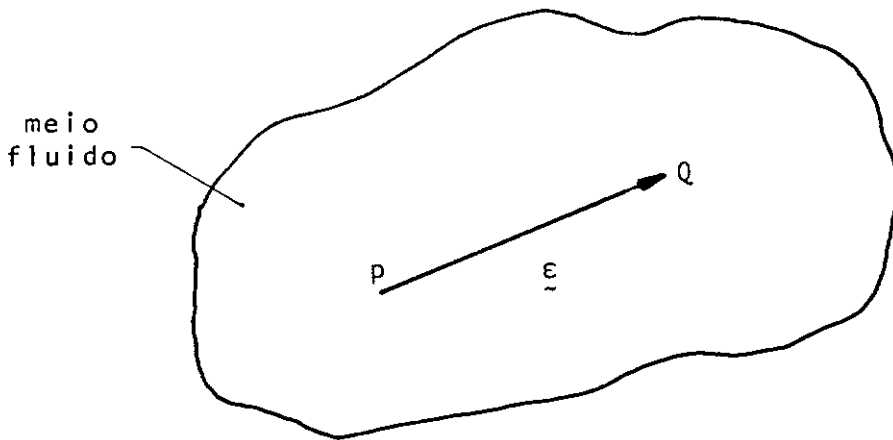


FIG. (4)

Para uma partícula, cuja localização, no instante t, é o ponto Q, a média no tempo de sua velocidade é tomada sobre  $\underline{u}(Q,t)$ .

Conhecendo  $\underline{u}(P,t)$ , que é a média no tempo da velocidade de uma sucessão de partículas que passam pelo ponto P nesse intervalo de tempo, é possível expressar  $\underline{u}(Q,t)$  em função de  $\underline{u}(P,t)$  através de uma expansão em série:

$$\underline{u}(Q,t) = \underline{u}(P,t) + \left[ (\underline{\epsilon} \cdot \nabla) \underline{u} \right] (P,t) \quad (2.4.7)$$

O termo  $\left[ (\underline{\epsilon} \cdot \nabla) \underline{u} \right] (P,t)$ , que representa uma derivada direcional, retém termos de primeira ordem em  $\epsilon = |\underline{\epsilon}|$ .

Para que essa aproximação não introduza erro considerável é necessário que  $\epsilon \ll \ell$ , onde  $\ell$  representa um comprimento caracterís-

tico para o campo acústico de primeira ordem. Ele limita a vizinhança do ponto  $P$  para a qual a eq. (2.4.7) pode ser usada.

Num campo acústico,  $\underline{\epsilon}$  é da ordem da amplitude de deslocamento.

O comprimento  $\lambda$  depende de cada problema particular, para ser definido. Por exemplo, para uma onda plana se propagando num meio infinito,  $\lambda$  é da ordem de  $k^{-1}$  ou  $\alpha^{-1}$ ; quando fronteiras estão presentes,  $\lambda$  pode ser tomado da ordem do menor raio de curvatura da superfície. Assim é possível especificar  $\lambda$  e, conseqüentemente,  $\epsilon$ .

Desde que a eq. (2.4.7) é válida, pode-se tomar sua aproximação até segunda ordem. Lembrando que, por definição,  $\underline{u}(Q,t) = \underline{U}$  e  $\underline{u}(P,t) = \underline{u}_2$ , a equação que dá a velocidade de partícula fica:

$$\underline{U} = \underline{u}_2 + \left\langle (\underline{\epsilon}_1 \cdot \nabla) \underline{u}_1 \right\rangle = \underline{u}_2 + \underline{u}_T \quad (2.4.8)$$

com  $\underline{u}_T$  sendo dado por  $\underline{u}_T = \left\langle (\underline{\epsilon}_1 \cdot \nabla) \underline{u}_1 \right\rangle$ .

## CAPITULO III

O VENTO ACÚSTICO PRÓXIMO A UMA SUPERFÍCIE.

## 3.1 - A Região Próxima a uma Superfície Rígida.

Em muitas situações de interesse, o Vento Acústico gera campos de força concentrados nas fronteiras do meio excitado acusticamente, como por exemplo, numa interface sólido-líquido.

No exame das equações do Vento Acústico nota-se que os resultados são consideravelmente mais simples em pontos próximos a superfícies rígidas, principalmente quando a relação  $\frac{\omega}{\nu}$ , entre a frequência angular e a viscosidade cinemática, é suficientemente grande e a curvatura da superfície não é excessiva.

Para analisar o fluxo próximo a uma superfície, considera-se a situação apresentada na Fig. (5).

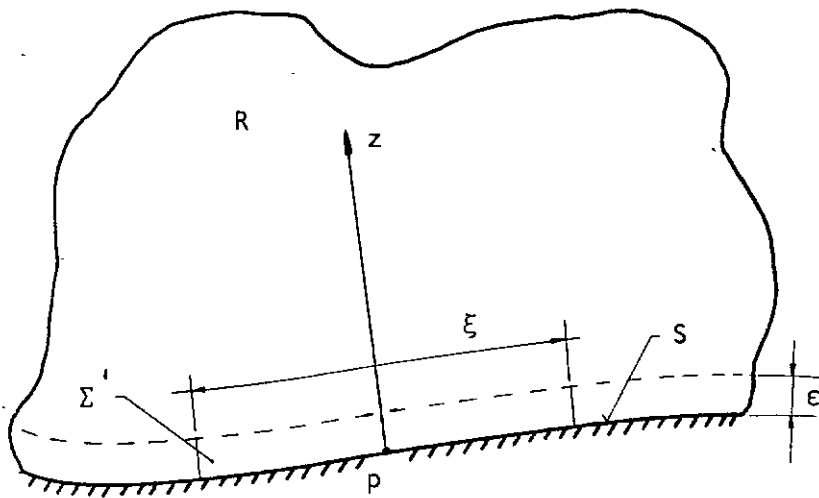


FIG. (5) - Região próxima a uma superfície.

A região  $R$ , de um fluido homogêneo e isotrópico, é limitada por uma superfície rígida  $S$ .

Fica definida uma região  $\Sigma$ , adjacente a  $S$ , formada por uma fina camada de fluido de espessura  $\epsilon$ .

Seja um ponto  $P$  pertencente a  $S$  e  $z$  a medida da distância, a partir de  $P$ , sobre a normal a superfície, como mostrado na Fig. (5).

Entende-se a circulação próxima a  $P$ , como sendo o fluxo em pontos sobre a normal a  $S$  por  $P$ , ou próximos dela, para os quais  $z \leq \epsilon$ .

Trabalhos desenvolvidos por Holtzmark (7) mostram que para valores suficientemente pequenos de  $\beta^{-1} = (\frac{2v}{\omega})^{1/2}$  a circulação próxima a  $P$  independe do campo acústico e das condições de contorno existentes em pontos distantes.

Tem-se duas conclusões importantes sobre o Vento Acústico próximo a um ponto de uma superfície rígida. A primeira é que para  $z < \epsilon$  a direção da velocidade de circulação  $\underline{u}_2$  é essencialmente independente de  $z$ , sendo paralela a  $S$  no local. A segunda conclusão é que a velocidade  $\underline{u}_2$  cresce rapidamente de zero a um valor limite  $\underline{u}_L$ , calculado em  $z = z_1$ , ainda na região  $\Sigma$ , sendo portanto,  $z_1 < \epsilon$ .

Essa velocidade limite pode ser considerada como uma boa aproximação para a velocidade  $\underline{u}_2$ , pois na faixa  $\epsilon > z > z_1$  a velocidade real difere muito pouco de  $\underline{u}_L$ .

Para a determinação do Vento Acústico próximo a uma superfície rígida, é necessário, inicialmente, o conhecimento da veloci-

dade  $\underline{u}_1$  que especifica o campo acústico de primeira ordem.

### 3.2 - Solução para o Campo Acústico de primeira ordem.

De acordo com a eq. (2.2.18), o campo de velocidades de primeira ordem  $\underline{u}_1(u_1, v_1, w_1)$  pode ser encontrado como a soma de uma parte irrotacional  $\underline{u}_a$ , solução da eq. (2.2.16), e uma parte solenoidal  $\underline{u}_b$ , solução da eq. (2.2.17).

A condição de contorno que aparece no problema próximo a uma superfície rígida é que a componente  $w_1$ , na direção normal a parede deve ser igual a zero. Para que essa condição seja satisfeita, é necessário introduzir uma nova parcela  $\underline{u}_c(0,0,w_c)$  para a velocidade  $\underline{u}_1$ , de forma que  $w_1 = w_a + w_b + w_c = 0$ .

Assim o campo acústico de primeira ordem fica determinado por  $\underline{u}_1 = \underline{u}_a + \underline{u}_b + \underline{u}_c$ .

Um sistema de coordenadas, apropriado para o problema, é apresentado na Fig. (6).

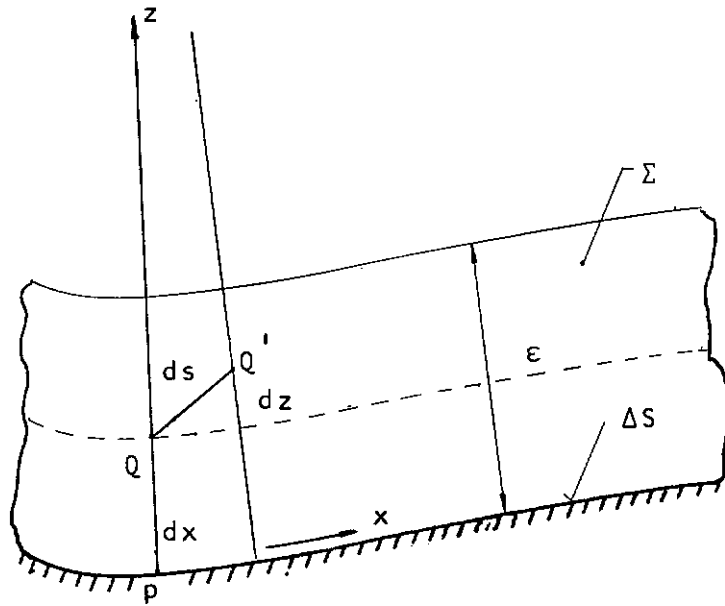


FIG. (6) - Sistema de coordenadas local.

As coordenadas  $x$  e  $y$  representam duas famílias de curvas ortogonais, enquanto  $z$  dá a medida ao longo da normal a  $S$ . Por exemplo, na curva  $x$ ,  $y$  e  $z$  são constantes.

De acordo com a Fig. (6) a posição do ponto  $Q$ , pertencente a  $\Sigma$ , é dado por  $z = \overline{PQ}$  e pela coordenada  $(x, y)$  do ponto  $P$  sobre  $S$ .

Seja:  $\frac{ds}{dx} = h_x$ ,  $\frac{ds}{dy} = h_y$ , e  $\frac{ds}{dz} = h_z$ , com  $\frac{\partial h_x}{\partial z} = a_x^{-1}$ ,

$\frac{\partial h_y}{\partial z} = a_y^{-1}$ , onde  $a_x$  e  $a_y$  são os raios de curvatura de  $\Delta S$  no ponto  $P$ , segundo  $x$  e  $y$ .

De acordo com a natureza da coordenada  $z$ ,  $\frac{ds}{dz} = 1$ , ou seja,  $h_z = 1$ .



Nyborg (13) apresenta a solução para o campo de velocidades de primeira ordem na forma de  $\underline{u}_1 = \underline{u}_{1a} + \underline{u}_{1b} + \underline{u}_{1c}$ , com as componentes  $(u_1, v_1, w_1)$  dadas por:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{ao} \left[ \cos \omega t - e^{-\beta z} \cos(\omega t - \beta z) \right] \\ v_1 &= v_{ao} \left[ \cos \omega t - e^{-\beta z} \cos(\omega t - \beta z) \right] \\ w_1 &= w_{ao} \cos \omega t - \frac{\gamma}{\sqrt{2}\beta} \left[ \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-\beta z} \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Nas eqs. (3.2.1)  $\gamma = \frac{\partial}{\partial x} (h_y u_{ao}) + \frac{\partial}{\partial y} (h_x v_{ao})$  e  $u_{ao}, v_{ao}, w_{ao}$  são as amplitudes das componentes da velocidade irrotacional  $\underline{u}_a$ . Elas são funções apenas de  $(x, y, z)$  variando lentamente na região  $\Sigma$ .

Com a especificação do campo acústico de primeira ordem na região  $\Sigma$ , através das eqs. (3.2.1), é possível determinar a velocidade de circulação  $\underline{u}_2$  e, posteriormente, a velocidade de transporte de massa  $\underline{U}$ .

### 3.3. - Solução para a Equação do Vento Acústico Próximo a uma Superfície Rígida.

Para a solução da eq. (2.3.5) é necessário calcular, inicialmente, o vetor  $\underline{F} = -\rho_0 \left\langle \underline{u}_1 \cdot \nabla \underline{u}_1 + \underline{u}_1 \nabla \cdot \underline{u}_1 \right\rangle$ , com  $\underline{u}_1$  dado pelas eqs. (3.2.1).

Da teoria vetorial, o vetor  $\underline{F}$ , de componentes  $(F_x, F_y, F_z)$  nas direções  $(x, y, z)$ , pode ser expresso como a soma de uma parte irrotacional  $\underline{F}_i$  e uma parte solenoidal  $\underline{F}_s$ . Assim, a eq. (2.3.5), pode ser desdobrada em:

$$-\mu \nabla^2 \underline{u}_2 = \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u}_2 = \underline{F}_s \quad (3.3.1a)$$

$$\text{e} \quad \nabla p_2 = \underline{F}_i \quad (3.3.1b)$$

De acordo com as aproximações consideradas, apenas as componentes  $F_x$  e  $F_y$ , de  $\underline{F}$ , dão contribuição real para o Vento Acústico na região  $\Sigma$ , enquanto a componente  $F_z$  pode ser desprezada.

Como determinado por Nyborg (13), as componentes da parte solenoidal de  $\underline{F}_s$ , a ser usada na eq. (3.3.1a), são:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\rho_0} F_{xs} &= q_x N_\alpha + u_{ao} \left[ \left( \frac{\partial w_{ao}}{\partial z} \right) N_\beta + (\nabla \cdot \underline{u}_{ao}) N_\gamma - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial}{\partial z} (h_x h_y) \right) w_{ao} N_\delta \right] \\ -\frac{2}{\rho_0} F_{ys} &= q_y N_\alpha + v_{ao} \left[ \left( \frac{\partial w_{ao}}{\partial z} \right) N_\beta + (\nabla \cdot \underline{u}_{ao}) N_\gamma - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial}{\partial z} (h_x h_y) \right) w_{ao} N_\delta \right] \\ -\frac{2}{\rho_0} F_{zs} &\cong 2 \langle \underline{u}_b \cdot \nabla w_a \rangle \cong q_z e^{-\beta z} \cos \beta z \quad (3.3.2) \end{aligned}$$

Nas eqs. (3.3.2) têm-se:

$$q_x = u_{ao} \frac{\partial u_{ao}}{\partial x} + v_{ao} \frac{\partial u_{ao}}{\partial y}$$

$$q_y = u_{ao} \frac{\partial v_{ao}}{\partial x} + v_{ao} \frac{\partial v_{ao}}{\partial y}$$

$$q_z = u_{ao} \frac{\partial w_{ao}}{\partial x} + v_{ao} \frac{\partial w_{ao}}{\partial y}$$

$$N_\alpha = e^{-2\beta z} - 2 e^{-\beta z} \cos \beta z$$

$$N_\beta = \beta z e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z) - e^{-\beta z} \sin \beta z$$

$$N_\gamma = e^{-\beta z} (\sin \beta z - \cos \beta z)$$

$$N_\delta = e^{-\beta z} \sin \beta z$$

Desde que  $q_x$ ,  $u_{ao}$ ,  $\frac{\partial u_{ao}}{\partial z}$ ,  $q_y$ , etc, são praticamente constantes em  $\Sigma$ ,  $F_{xs}$  e  $F_{ys}$  são funções essencialmente de  $z$ . Então  $\nabla \cdot \underline{F}_s$  é desprezível e  $\underline{F}$  pode ser usado como um vetor solenoidal na eq. (3.3.1a).

Sob essas condições, em  $\Sigma$ , a velocidade  $\underline{u}_2$  é paralela a  $\Delta S$  e independente de  $x$  e  $y$ , variando apenas com  $z$ . Consequentemente, a eq. (3.3.1a) em termos da componente  $u_2$  da velocidade  $\underline{u}_2$ , fica:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = - \mu^{-1} F_{xs} \quad (3.3.3)$$

com as condições de contorno:

$$u_2(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_2(\infty)}{\partial z} = 0 \quad (3.3.4)$$

A solução (13) da eq. (3.3.3) com as condições dadas na eq. (3.3.4) é:

$$u_2 = \omega^{-1} \left\{ q_x u_\alpha + u_{ao} \left[ \left( \frac{\partial w_{ao}}{\partial z} \right) u_\beta + (\nabla \cdot \underline{u}_{ao}) u_\gamma - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{\partial}{\partial z} (h_x h_y) \right) w_{ao} u_\delta \right] \right\} \quad (3.3.5)$$

Na eq. (3.3.5) tem-se:

$$u_\alpha = \frac{1}{4} e^{-2\beta z} + e^{-\beta z} \sin \beta z - \frac{1}{4}$$

$$u_\beta = \frac{1}{2} \beta z e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z) - e^{-\beta z} \sin \beta z - \\ - \frac{1}{2} e^{-\beta z} \cos \beta z + \frac{1}{2}$$

$$u_\gamma = \frac{1}{2} e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z) - \frac{1}{2}$$

$$u_\delta = \frac{1}{2} (e^{-\beta z} \cos \beta z - 1)$$

Para obter-se as outras componentes de  $\underline{u}_2$  basta usar a condição de  $\nabla \cdot \underline{u}_2 = 0$ .

### 3.4 - A Velocidade de Transporte de Massa.

A eq. (3.3.5) dá a solução da equação do Vento Acústico em termos da velocidade  $\underline{u}_2$ .

Como foi visto na seção (2.3), em experiências sobre Vento Acústico é necessário o conhecimento da velocidade de partícula ou de transporte de massa.

De acordo com a eq. (2.4.8) a velocidade de transporte de massa  $\underline{u}$  é dada por  $\underline{u} = \underline{u}_2 + \underline{u}_T$ , sendo  $u_T = \langle (\underline{\varepsilon}_1 \cdot \nabla) \underline{u}_1 \rangle$ .

O vetor  $\underline{\varepsilon}_1$  pode ser tomado da ordem do deslocamento no campo acústico de primeira ordem, logo:

$$\underline{\varepsilon}_1 = \int \underline{u}_1 dt \quad (3.4.1)$$

Usando as eqs. (2.4.8) e (3.4.1), Nyborg (13) calculou a velocidade  $\underline{u}_T$  de componentes  $(u_T, v_T, w_T)$  segundo  $(x, y, z)$ :

$$u_T = \frac{1}{2\omega} u_{ao} \left\{ \frac{\partial w_{ao}}{\partial z} u_\varepsilon + \left[ \nabla \cdot \underline{u}_{ao} - w_{ao} \frac{\partial}{\partial z} (h_x h_y) \right] (e^{-2\beta z} - e^{-\beta z} \cos \beta z) \right\} \quad (3.4.2)$$

$$v_T = \frac{1}{2\omega} v_{ao} \left\{ \frac{\partial w_{ao}}{\partial z} u_\varepsilon + \left[ \nabla \cdot \underline{u}_{ao} - w_{ao} \frac{\partial}{\partial z} (h_x h_y) \right] (e^{-2\beta z} - e^{-\beta z} \cos \beta z) \right\} \quad (3.4.3)$$

onde:

$$u_\varepsilon = \left[ \beta z e^{-\beta z} \sin \beta z - \beta z e^{-\beta z} \cos \beta z + e^{-\beta z} \cos \beta z - e^{-2\beta z} \right]$$

A componente  $w_T$  é desprezível em  $\Sigma$  pois nesta região ,

$\frac{\partial u_1}{\partial z}$  e  $\frac{\partial v_1}{\partial z}$  são pequenos. Então, relativamente a  $u_T$  e  $v_T$ ,  $w_T \approx 0$ .

Finalmente, a velocidade de transporte de massa  $\underline{U}(U,V,W)$  é determinada utilizando-se a eq. (2.4.8). A componente de  $\underline{U}$  na direção  $x$  é:

$$U = -\frac{1}{4\omega} q_x (g_1 - 4g_2) + \frac{1}{2\omega} u_{ao} \left[ \frac{\partial w_{ao}}{\partial z} (g_1 - 2g_2) + \right. \\ \left. + \nabla \cdot \underline{u}_{ao} (g_1 - g_2) + \frac{\partial}{\partial z} (h_x h_y) w_{ao} g_1 \right] \quad (3.4.4)$$

$$\text{onde: } g_1 = 1 - e^{-2\beta z} \quad \text{e} \quad g_2 = e^{-\beta z} \sin \beta z \quad (3.4.5)$$

As componentes  $V$  e  $W$  podem ser obtidas de maneira análoga à de  $U$ , ou utilizando o fato de  $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ .

CAPITULO IV  
O VENTO ACÚSTICO E A DIFUSÃO

Para a análise do Vento Acústico como um processo físico acelerador da difusão do  $KCl$  na água é importante estabelecer a relação entre a velocidade de circulação  $\underline{U}$ , calculada anteriormente, e o fenômeno da difusão natural.

A difusão natural de um sal na água (15) é usualmente representada pela equação:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C \quad (4.1)$$

Na eq. (4.1)  $C$  é a concentração do soluto no solvente, sendo uma função da posição e do tempo, ou seja,  $C = C(x, y, z, t)$ ; enquanto  $D$  é o coeficiente de difusividade, que depende da temperatura do meio onde ocorre a difusão.

A eq. (4.1) se aplica a situações como a da Fig.(7), onde  $x, y, z$  representam um sistema de coordenadas local,  $S$  é a superfície formada pelo soluto e  $R$  é uma região do meio líquido adjacente a  $S$ .

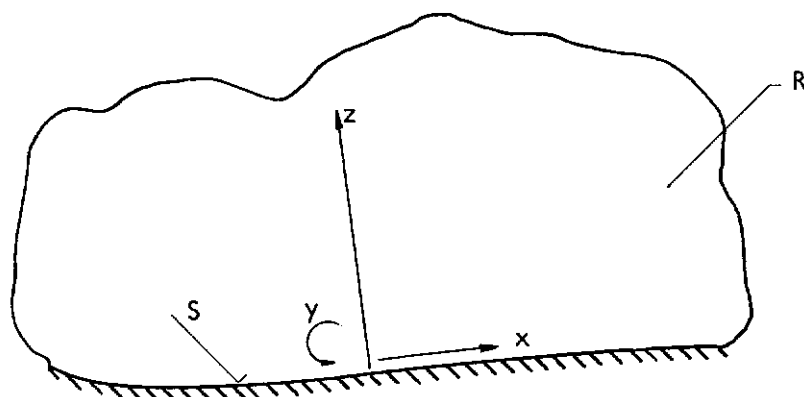


FIG. (7) - Esquema para a Difusão Natural.

A difusão corresponde a um transporte de massa do soluto para o solvente e se desenvolve lentamente, quando não há agitação no meio onde o fenómeno ocorre.

No caso da difusão natural de um sal na água, a lentidão do processo pode ser explicada (15) observando que junto à parede de sal, existe uma fina camada de solução saturada evitando o contato direto de solução menos concentrada com o sal, constituindo uma barreira à difusão.

Na ausência de agitação o movimento da solução se faz apenas por diferença de densidade entre pontos do meio líquido.

A difusão do sal na água aumenta consideravelmente com a presença de uma agitação, que remova continuamente a camada de solução adjacente à parede de sal.

Fogler e Lund (14) analisaram o aumento no transporte de massa em poros bidimensionais resultante da superposição de um transporte convectivo, induzido acusticamente, sobre um transporte difusional.

A eq. (4.1) foi modificada para levar em conta o efeito do Vento Acústico, assumindo a seguinte forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla C = D \nabla^2 C \quad (4.2)$$

A eq. (4.2) apresenta a inclusão do termo  $\underline{U} \cdot \nabla C$  em relação à eq. (4.1), sendo  $\underline{U}$  a velocidade de circulação ou de transporte de massa, C e D as mesmas grandezas apresentadas anteriormente.

A velocidade  $\underline{U}$  foi calculada através da solução da equa -



ção do Vento Acústico na forma da eq. (2.3.7) de acordo com condições de contorno próprias para o campo acústico em poros bidimensionais.

Com a determinação da velocidade de transporte de massa, a equação (4.2) foi resolvida numericamente obedecendo condições de contorno sobre a concentração.

Os resultados obtidos foram comparados com a situação de difusão natural. Com a presença do Vento Acústico, foi encontrado um aumento da ordem de 150% no transporte de massa em relação ao transporte difusivo natural.

O trabalho de Fogler e Lund (14) abriu caminho para o estudo do Vento Acústico como o mecanismo físico do efeito do ultrassom sobre a difusão.

## CAPITULO V

### TRABALHO EXPERIMENTAL

#### 5.1 - Montagem experimental.

A avaliação do efeito do campo acústico sobre a difusão do  $KCl$  na água foi feita através do seguinte procedimento:

( i ) Determinação da variação de concentração com o tempo sob condições de difusão natural e regime transitório.

(ii) Determinação da variação de concentração com o tempo quando a difusão se desenvolve sob o efeito do Vento Acústico, em regime transitório.

Nas duas experiências não foi analisada a variação da concentração em relação à posição, as medidas de concentração foram realizadas em um ponto bem determinado do espaço. Desse modo,  $C = C(x, y, z, t)$  é função apenas da variável tempo, enquanto  $x, y, z$  funcionam como constantes.

A montagem utilizada para a realização das experiências (i) e (ii) está indicada esquematicamente na Fig. (8).

#### 5.2 - Preparação do Sal.

O cloreto de potássio foi prensado em uma matriz cilíndrica a uma pressão de  $191,0 \text{ kg/cm}^2$  formando uma placa rígida.

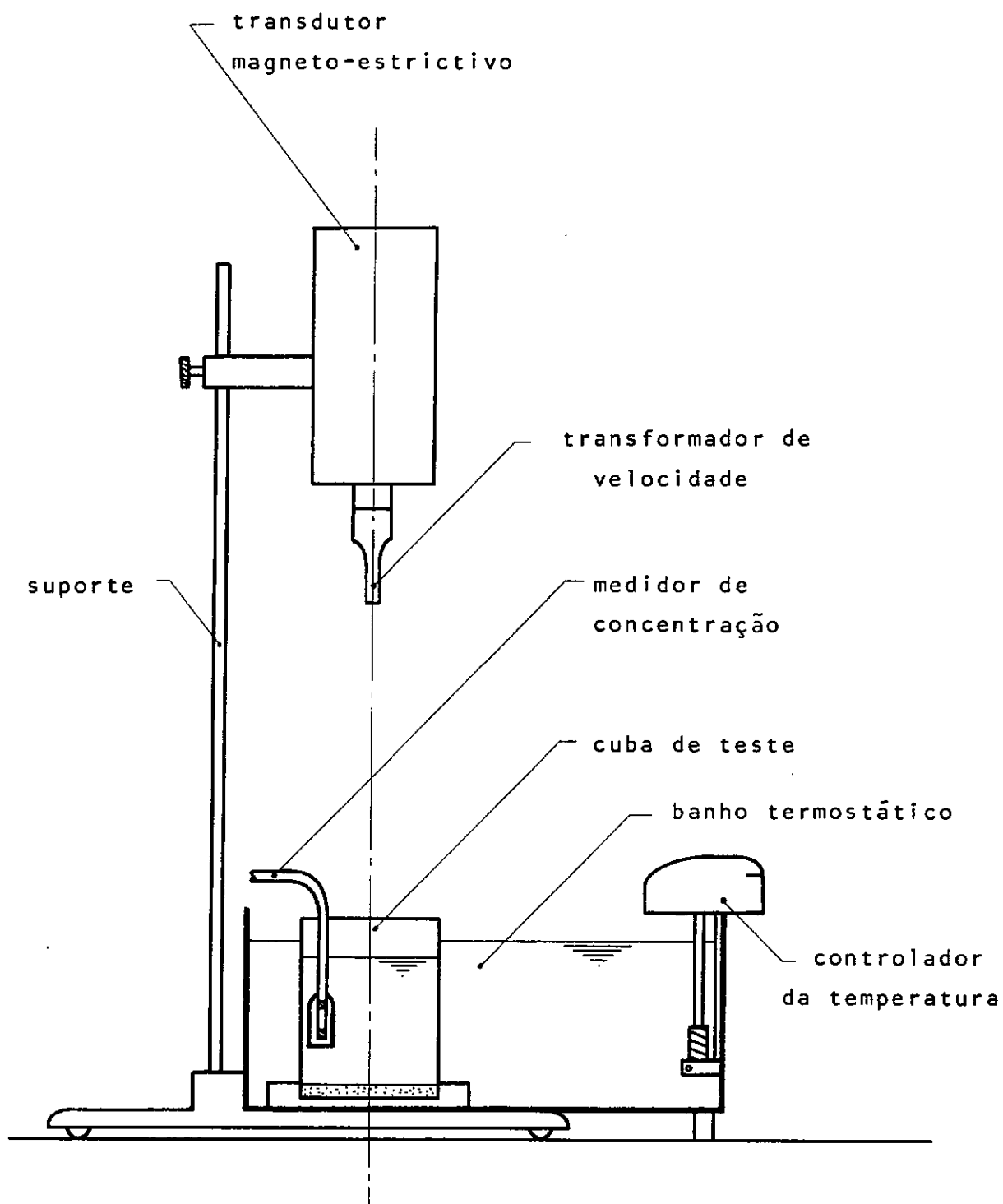


FIG. (8) - Esquema da montagem experimental

A cuba, mostrada na Fig. (9), é composta da matriz metálica circular com um rebaixo central e de um tubo plástico nela montado.

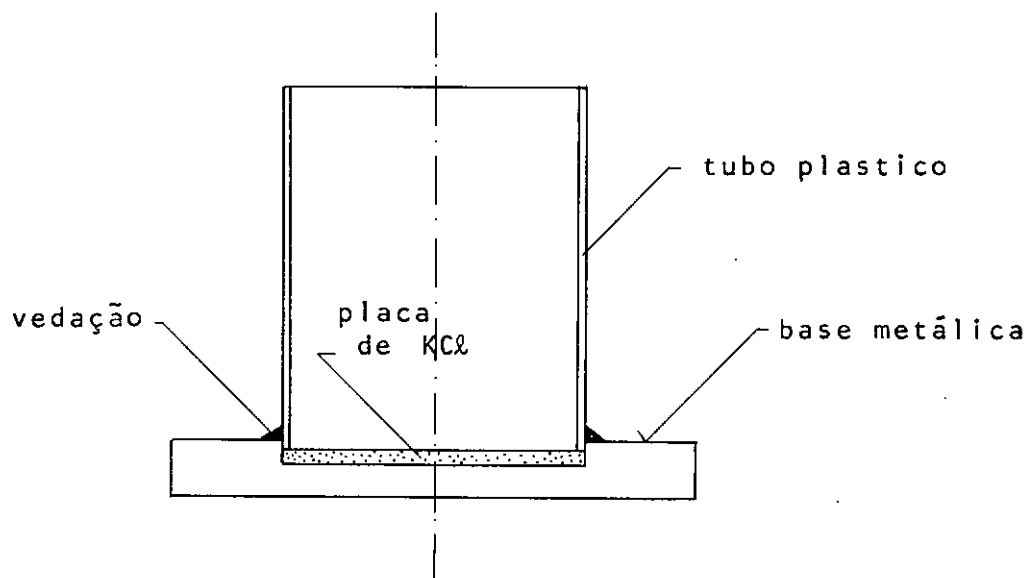


FIG. (9) - Cuba de teste.

Durante as experiências a cuba permanece imersa em um banho termostático. Por esta razão, fez-se a vedação da conexão, tubo-base metálica, utilizando uma cola de borracha de silicone Dow-Corning RTV.

A cuba contém um volume de 800 ml de água destilada e no seu interior são tomadas as medidas da concentração.

Para a colocação da água destilada na cuba, sem que a agitação provocada por esta operação possa dissolver prematuramente o sal, usa-se uma folha plástica flexível, que evita o contato da água com o KCl, até o instante inicial de medição, quando a mesma é retirada lentamente de forma a evitar agitação.

De acordo com tal procedimento as medidas de concentração são realizadas com boa precisão.

### 5.3 - O Medidor de Concentração.

Utilizou-se um medidor de concentração que através de uma ponte de Wheatstone determina a resistência da solução numa região entre dois eletrodos de platina enegrecidos.

Através de soluções de  $KCl$  em água, de concentrações previamente conhecidas, foi obtida a calibração dos eletrodos, como mostrado no Apêndice (A). Dessa forma as resistências medidas durante as experiências foram relacionadas com a concentração.

O aparelho usado para as medidas é o MICROMETRICS Electro-phoretic Mass-Transport Analyser, representado esquematicamente na Fig. (10).

Como o objetivo das experiências (i) e (ii) é a determinação da variação da concentração com o tempo, os eletrodos foram sempre mantidos a uma distância fixa da placa e do eixo de simetria da cuba.

### 5.4 - Banho Termostático.

Como a dissolução de um sal em água é influenciada pela temperatura na qual o processo se desenvolve, é necessário promover um controle sobre esta grandeza, de modo que os resultados obtidos em (i) e (ii) possam ser comparados sem erros.

A cuba, contendo o sal e a água destilada, fica no interior de um banho termostático a uma temperatura constante de  $20^{\circ}C$ . O controle automático da temperatura foi feito com um TECAN Fail Safe

fe Tempunit, mostrado na Fig. (11).

### 5.5 - Conjunto Gerador do Campo Acústico.

Na produção do campo acústico foi utilizado um conjunto gerador-amplificador-transdutor BLACKSTONE modelo BP-2, mostrado esquematicamente na Fig. (12).

O transdutor é magneto-strictivo sendo acoplado com um transformador de velocidade de titânio, que amplifica o deslocamento na extremidade em contato com o meio líquido, no qual se produz o campo acústico.

A amplitude da velocidade da face livre do transformador de velocidade foi determinada experimentalmente. Essa medição foi necessária para o conhecimento quantitativo da fonte do campo acústico no meio líquido.

O procedimento de calibração é apresentado no Apêndice(B).

A determinação da amplitude da velocidade é fundamental para a especificação do campo acústico de primeira ordem e consequentemente da velocidade do Vento Acústico.

O aparelho gerador do campo ultrasônico trabalha numa faixa de frequência de  $20 \pm 0,5$  KHz, na qual se encontra a ressonância do conjunto transdutor magneto strictivo-transformador de velocidade.

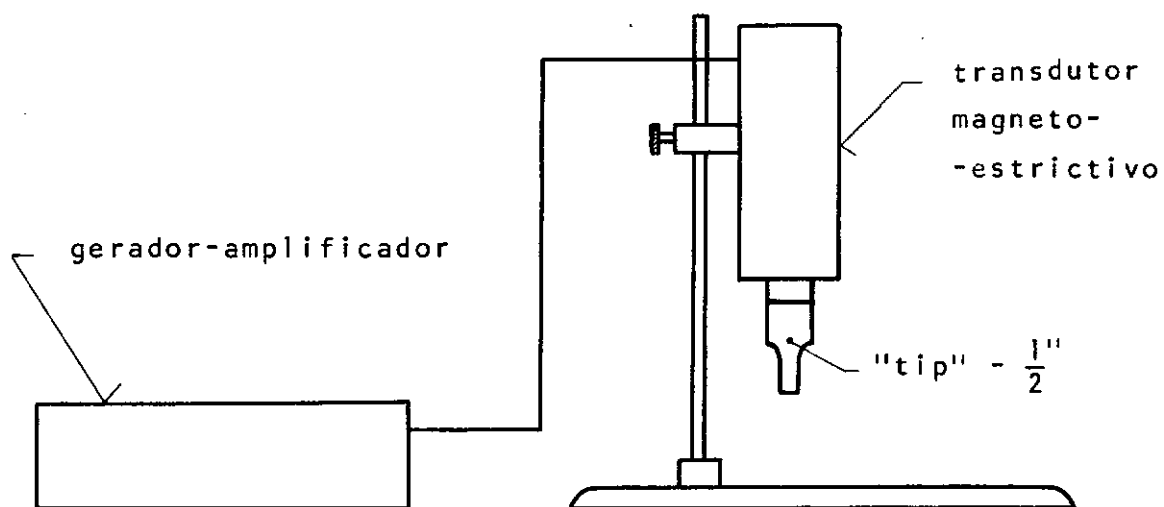


FIG. (12) - Conjunto gerador-transdutor.

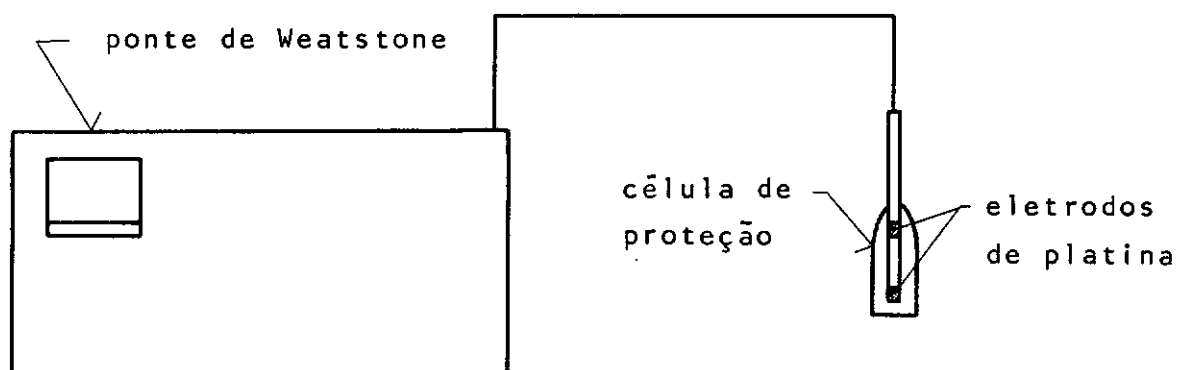


FIG. (10) - Medidor de Concentração.

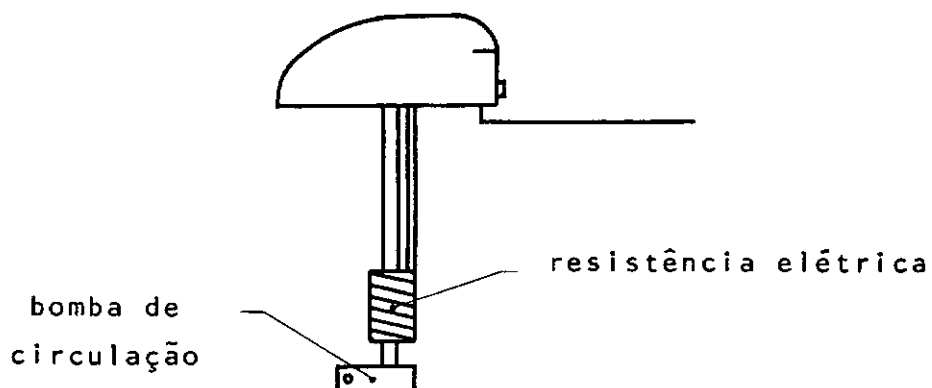


FIG. (11) - Controlador da temperatura.

### 5.6 - Experiência (i) - Difusão Natural do $KCl$ em Água em Regime Transitório.

No caso da difusão natural do  $KCl$  na água, utilizou-se apenas o medidor de concentração e o controlador de temperatura.

A posição dos eletrodos foi fixada para as medidas da variação da concentração com o tempo.

Pelas condições de simetria da cuba de teste e da placa de sal, foi necessário estabelecer a distância  $d$  da placa de sal ao ponto médio entre os eletrodos e a distância  $r$  do eixo de simetria da cuba ao eixo dos eletrodos. Para as experiências realizadas usou-se  $d = 2,25$  cm,  $r = 3,5$  cm e um volume de 800 ml de água destilada.

As medidas de concentração foram tomadas em intervalos de 5 minutos até a saturação da solução. Foi então obtida uma curva Concentração versus Tempo que está representada na Fig. (13), onde a concentração é dada em gr/l e o tempo em minutos. Os dados utilizados no traçado da curva encontram-se tabelados no Apêndice(C).

### 5.7 - Experiência (ii) - Difusão do $KCl$ na Água em Regime Transitório, sob o Efeito do Vento Acústico.

Neste caso existe no meio líquido um campo acústico com energia suficiente para provocar o Vento Acústico junto à parede de sal.

O campo acústico gerado no meio líquido é estacionário.



Para atender tal requisito a distância  $h$ , da face livre do transformador de velocidade à placa de sal, foi tomada como um múltiplo ímpar de  $\frac{\lambda}{4}$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda no meio líquido.

Para a frequência de 20KHz,  $\lambda$  é igual a 7,5 cm. A condição do campo acústico ser estacionário é imposta quando  $h = n \frac{\lambda}{4}$ , com  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$

De acordo com as dimensões da cuba e do transformador de velocidade tomou-se  $n = 3$ , o que corresponde a uma altura  $h = 5,08 \text{ cm}$ .

O transformador de velocidade foi colocado no eixo de simetria da cuba.

Foi utilizado apenas 20% da amplificação no amplificador do gerador de ultrasom, a fim de evitar o aparecimento de Cavitação no meio líquido.

Embora a Cavitação pudesse ser utilizada como um processo mais eficiente, que a convecção provocada pelo Vento Acústico, uma vez que a primeira provoca erosão mecânica na superfície de sal, é pouco provável que tal fenômeno ocorra nas condições de grandes pressões estáticas.

Sob estas condições de potência, a amplitude da velocidade na face livre do transformador de velocidade é  $W_0 = 0,192 \text{ cm/s}$ , o que corresponde a uma intensidade acústica  $I = 5,52 \text{ watts/m}^2$ .

As medidas de concentração foram efetuadas da mesma maneira que na experiência (i).

A curva Concentração versus Tempo está representada na Fig. (13), superposta à curva da experiência (i), enquanto os dados

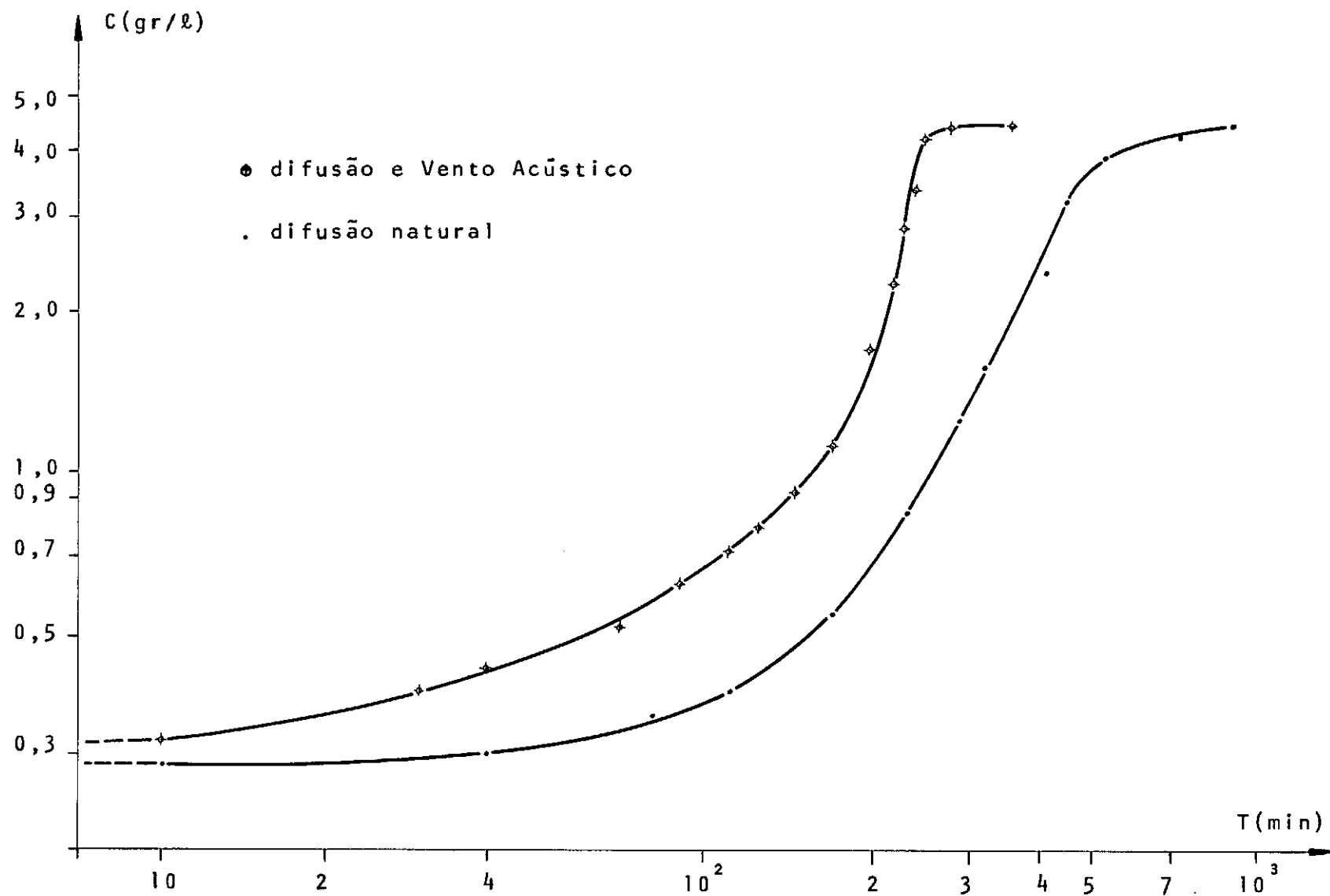


FIG. (13) - Curvas Concentração vs. Tempo.

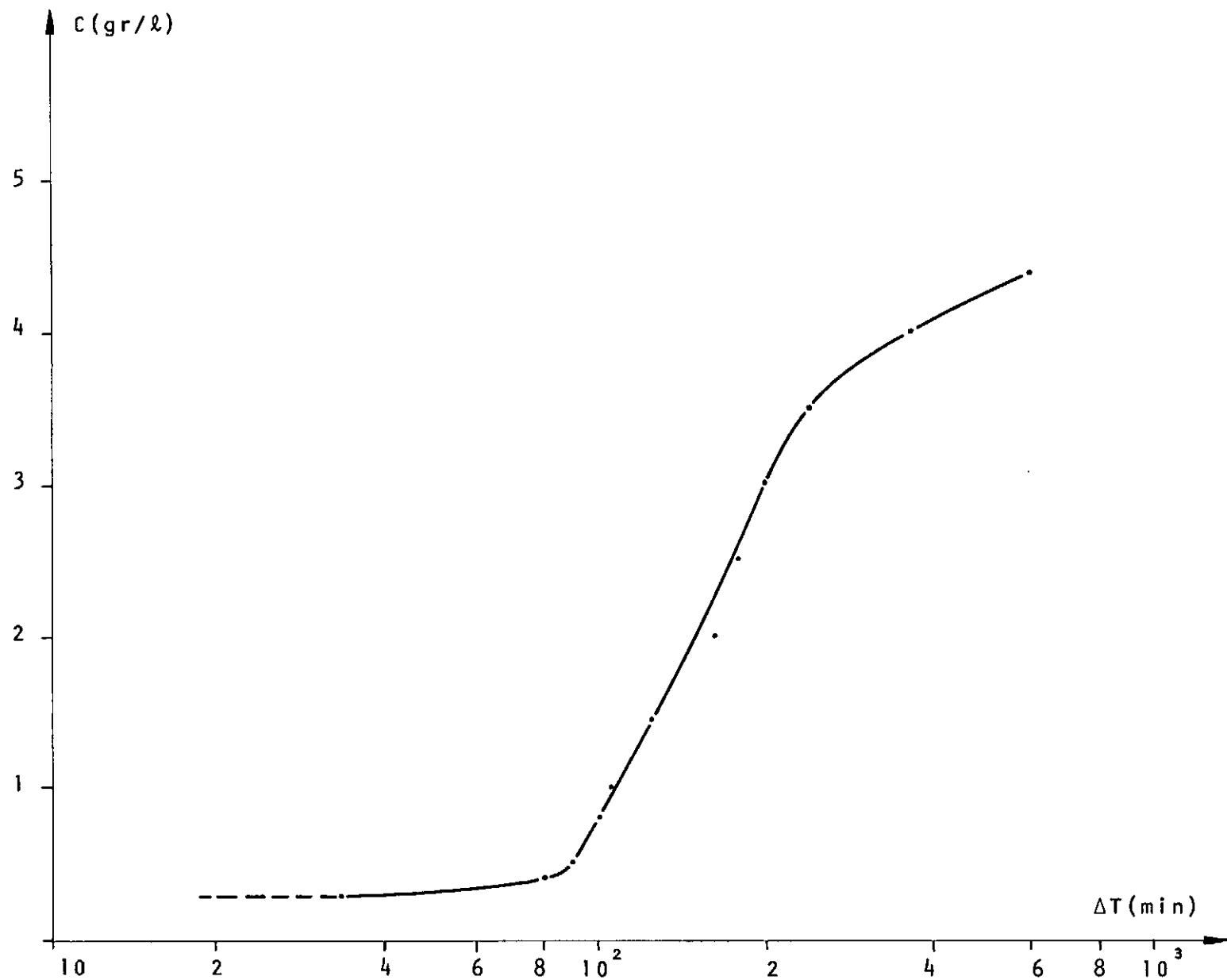


FIG. (14) - Curva Concentração vs.  $\Delta T$ .

utilizados para o seu traçado estão no Apêndice (C).

## 5.8 - Análise dos Resultados.

Observando as curvas Concentração versus Tempo mostrada, na Fig. (13), pode-se avaliar qualitativamente o efeito do Vento Acústico sobre a difusão natural do  $KCl$  em água, em regime transitório.

No caso da difusão natural, curva (i), o estado de saturação foi alcançado no final de 900 minutos. Pela ação do Vento Acústico, o mesmo estado final foi obtido em 300 minutos.

Houve uma redução considerável no tempo necessário para que a solução atingisse a saturação em um mesmo volume de solvente.

É interessante observar o fato que próximo à saturação, o comportamento das duas curvas é sensivelmente diferente. Com o campo acústico presente, a inclinação é muito maior. Na região mais crítica da difusão natural, o Vento Acústico acelera consideravelmente o processo.

Na Fig. (14) estão representados os intervalos de tempo  $\Delta T$  entre estados idênticos de concentração em ambas as experiências.

Durante o processo de difusão natural, forma-se uma camada de solução saturada junto à superfície de sal, o que dificulta o contato entre a água pura e o  $KCl$ . A difusão se processa por diferença de densidade no meio líquido.

O Vento Acústico gerado pelo campo acústico, na experiên-

cia (ii), promove uma circulação junto à interface sólido-líquido , removendo continuamente a camada de solução saturada, aumentando a taxa de dissolução do sal na água.

## CAPITULO VI

### SUGESTÃO DE UM MODELO TEÓRICO

#### 6.1 - A Velocidade de Transporte de Massa.

No capítulo anterior constatou-se experimentalmente o aumento da difusão do  $KCl$  na água provocado pelo Vento Acústico.

Nesta etapa do trabalho será utilizada a teoria sobre o Vento Acústico, apresentada nos caps. (II) e (III), para a justificativa teórica dos resultados experimentais.

O modelo físico do arranjo experimental está mostrado na Fig. (15). O Vento Acústico pode ser analisado em uma região  $\Sigma$  na interface sólido-líquido. Nessa região é possível resolver a equação do Vento Acústico em termos de  $u_2$ , como foi visto no cap. (III).

A solução na região  $\Sigma$  é primordial para a constatação dos resultados experimentais, pois é nesta região que se forma a camada de solução saturada, que constitui a barreira natural à difusão do sal na água.

De acordo com a observação experimental, a circulação provocada pelo Vento Acústico remove continuamente esta camada, acelerando o processo de dissolução do  $KCl$ .

Segundo o modelo proposto, pode-se equacionar o problema da seguinte forma:

"Um transdutor cilíndrico vibra longitudinalmente num meio fluido, com seu eixo de simetria perpendicular a uma superfície plana rígida. Sua face livre tem velocidade  $W_0 \cos \omega t$  e está distan-

te h da superfície, de modo a se obter ondas estacionárias no campo acústico e de primeira ordem. Procura-se a solução da equação do Vento Acústico para a determinação da velocidade de transporte de massa e seu acoplamento com a equação da difusão."

Na Fig. (15),  $\Sigma$  e  $\epsilon$  têm o mesmo significado apresentado na seção (3.1).

O sistema de coordenadas utilizado é cilíndrico, com sua origem no ponto de intersecção do eixo de simetria do transdutor com a superfície da placa de sal.

O campo acústico de primeira ordem deve ser especificado na região  $\Sigma$ . A velocidade  $\underline{u}_1$  tem componentes  $(u_1, v_1, w_1)$  nas direções  $(r, \theta, z)$ , onde  $r$  e  $\theta$  medem, respectivamente, distância e ângulo na superfície rígida, enquanto  $z$  dá a medida ao longo da normal.

Pela simetria em relação ao eixo  $z$  a componente  $v_1$  é nula.

Na região  $\Sigma$  o campo acústico de primeira ordem é irrotacional (13), e como o fluxo é incompressível a divergência da velocidade  $\underline{u}_1$  também é nula, ou seja,  $\nabla \cdot \underline{u}_1 = 0$ .

Nessas condições  $\underline{u}_1 = \underline{u}_a$  de componentes  $(u_a, 0, w_a)$  e como  $\nabla \cdot \underline{u}_a = 0$  tem-se:

$$\frac{\partial w_{a0}}{\partial z} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_{a0}) \quad (6.1.1)$$

onde  $w_{a0}$  e  $u_{a0}$  são, respectivamente, as amplitudes de  $w_a$  e  $u_a$ .

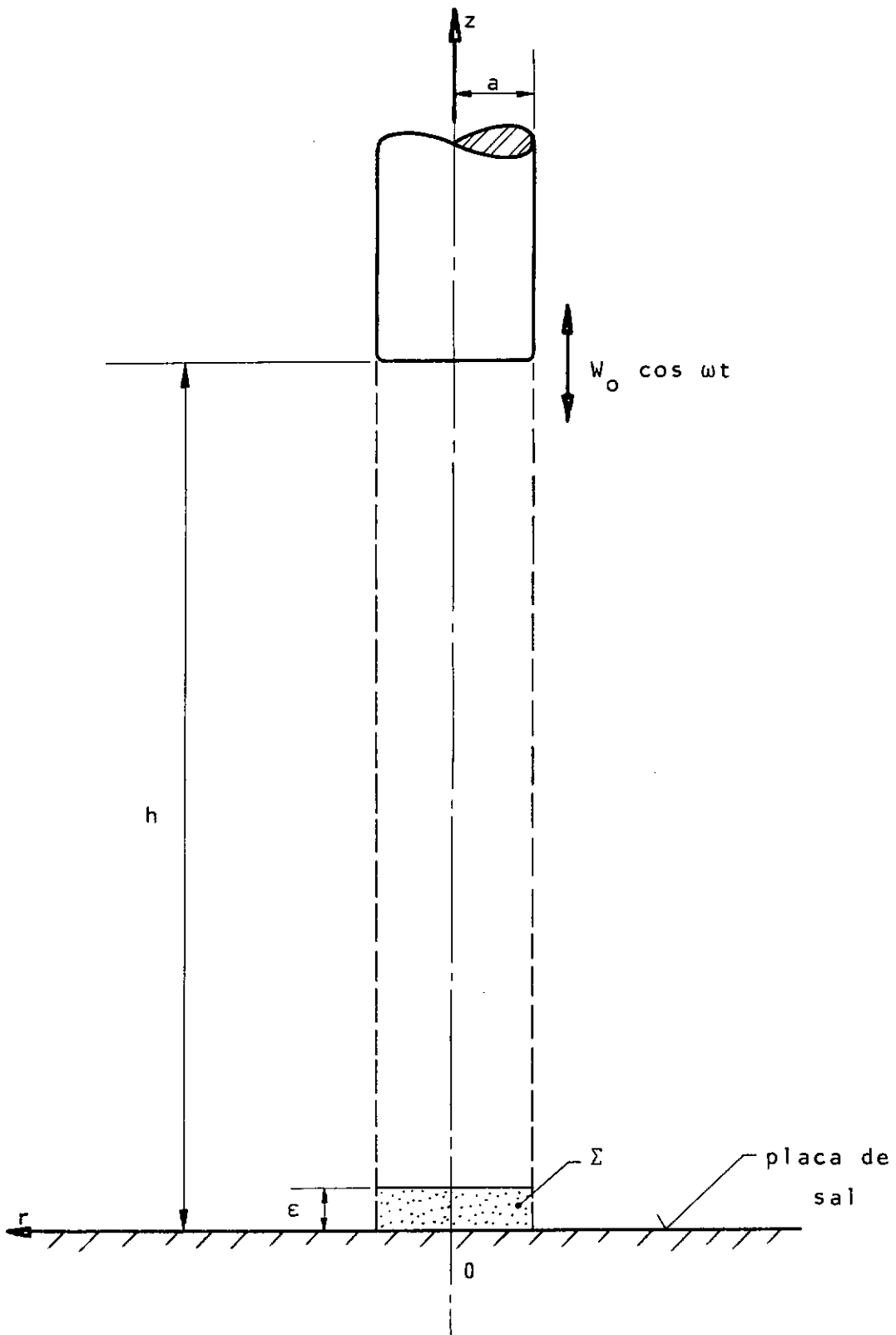


FIG. (15)



A face livre do transdutor tem velocidade  $W_0 \cos \omega t$  na direção  $z$  e dista  $h = n \frac{\lambda}{4}$ , com  $n = 1, 3, 5, \dots$  da superfície rígida. Como o campo acústico de primeira ordem é estacionário, a componente  $z$  da velocidade  $u_a$  fica:

$$w_a = w_{a0} \cos \omega t = W_0 \sin kz \cos \omega t \quad (6.1.2)$$

A eq. (6.1.2) deve satisfazer às condições de contorno:

$$w_a = 0 \quad \text{para} \quad z = 0$$

e 
$$w_a = W_0 \cos \omega t \quad \text{para} \quad z = h$$

De acordo com as eqs. (6.1.1) e (6.1.2) a componente  $u_a$  pode ser determinada:

$$W_0 k \cos kz = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_a).$$

Integrando vem:

$$r u_a = - \frac{1}{2} W_0 r^2 k \cos kz \cos \omega t + f(z),$$

ou 
$$u_a = - \frac{1}{2} W_0 r k \cos kz \cos \omega t + \frac{1}{r} f(z).$$

Como  $u_a = 0$  para  $z = 0$  e  $r = 0$  em virtude da simetria, a função  $f(z) \equiv 0$ . Então:

$$u_a = - \frac{1}{2} W_0 r k \cos kz \cos \omega t = u_{a0} \cos \omega t \quad (6.1.3)$$

Através das eqs. (6.1.2) e (6.1.3) fica especificado o campo acústico de primeira ordem, que será utilizado na solução da equação do Vento Acústico.

Segundo o que foi apresentado na seção (3.4) a velocidade-

de transporte de massa, associada com o Vento Acústico,  $\underline{U}$  de componentes  $(U, V, W)$  nas direções  $(r, \theta, z)$  tem componente  $U$  dada por:

$$U = \frac{1}{\omega} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (u_{ao})^2 (g_2 - \frac{3}{8} g_1) + \frac{(u_{ao})^2}{r} (g_2 - \frac{1}{2} g_1) \right] \quad (6.1.4)$$

onde  $g_1 = 1 - e^{-2\beta z}$  e  $g_2 = e^{-\beta z} \sin \beta z$

Utilizando a eq. (6.1.3) vem:

$$U = \frac{1}{\omega} \left[ \frac{1}{2} W_0^2 k^2 r \cos^2 kz (g_2 - \frac{3}{8} g_1) + \frac{1}{4} W_0^2 k^2 r \cos^2 kz (g_2 - \frac{1}{2} g_1) \right]$$

ou 
$$U = \frac{W_0^2 k^2}{16 \omega} r \cos^2 kz (20 g_2 - 5 g_1) \quad (6.1.5)$$

De acordo com a simetria, a componente  $V$  na direção  $\theta$  é nula. Como  $\nabla \cdot \underline{U} = 0$  tem-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U) + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (6.1.6)$$

Levando a eq. (6.1.5) na eq. (6.1.6) é possível determinar a componente  $W$  da velocidade de transporte de massa na região  $\Sigma$ , junto à parede de sal.

Na seção (3.1) observou-se que a velocidade  $\underline{U}$  pode ser aproximada por um valor limite  $\underline{U}_L$ . Na região  $\Sigma$ ,  $\underline{U}$  cresce rapidamente para o valor limite e permanece constante.

Esse comportamento pode ser constatado pela análise das funções  $g_1$  e  $g_2$ , apresentadas na Fig. (16).

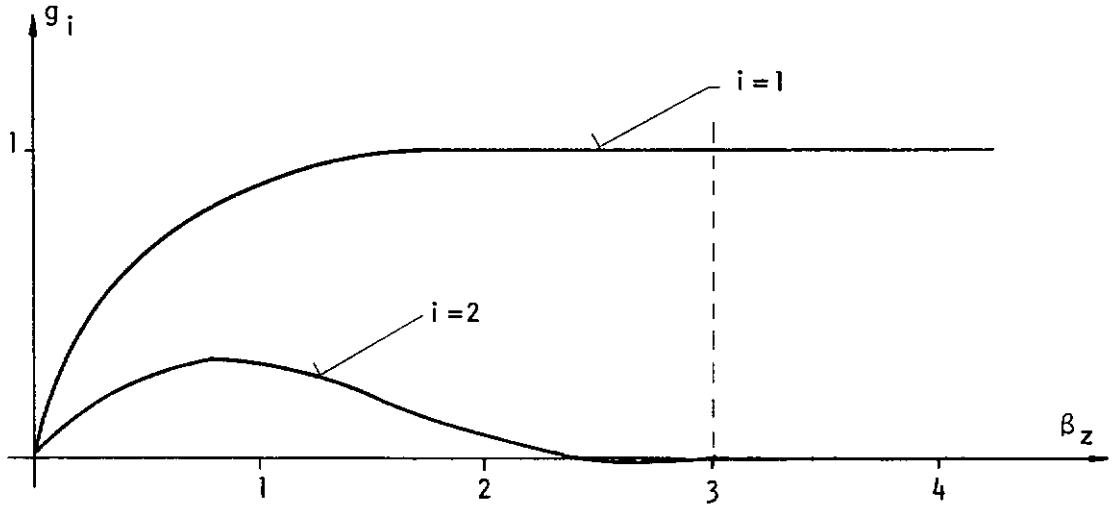


FIG. (16) - Funções  $g_1 = 1 - e^{-2\beta z}$  e  $g_2 = e^{-\beta z} \sin \beta z$ .

Para o campo acústico com frequência  $f = 20$  KHz, o parâmetro  $\beta = 3 \cdot 10^2 \text{ cm}^{-1}$ . A partir de  $\beta z = 3$ , o que corresponde a  $z = 0,1$  mm, a função  $g_1$  tende a 1, enquanto a função  $g_2$  tende a 0.

Através dessa análise, vê-se que é pequeno o erro cometido ao adotar  $\underline{U}_L$  para representar a velocidade de transporte de massa na região  $\Sigma$ .

De acordo com os limites de  $g_1$  e  $g_2$ ,

$$\underline{U}_L = - \frac{5 W_0^2 k^2}{16 \omega} r \cos^2 kz. \quad (6.1.7)$$

Usando a eq. (6.1.6) determina-se a componente

$$\underline{W}_L = - \frac{5 W_0^2 k}{32 \omega} (2kz + \sin 2kz) \quad (6.1.8)$$

A velocidade  $\underline{U}$  tem componentes  $(U,0,W)$ , onde  $U$  e  $W$  são dadas pelas eq. (6.1.7) e eq. (6.1.8).

Dessa forma fica determinada a velocidade de transporte de massa na região  $\Sigma$ .

## 6.2 - Vento Acústico e Difusão.

A partir da determinação da solução da equação do Vento Acústico é possível calcular a função concentração  $C = C(x,y,z,t)$  através da eq. (4.2), que corresponde à equação da difusão natural modificada por Fogler e Lund (14), de modo a levar em consideração o efeito do Vento Acústico:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla C = D \nabla^2 C \quad (4.2)$$

Na eq. (4.2) o vetor  $\underline{U}$  tem componentes  $(U,0,W)$  determinadas pelas eq. (6.1.7) e eq. (6.1.8).

A equação da difusão deve ser resolvida no mesmo sistema de coordenadas usado para a determinação da velocidade  $\underline{U}$ , ou seja, num sistema de coordenadas cilíndricas  $(r,\theta,z)$ . Dessa forma a função concentração fica  $C = C(r,\theta,z,t)$ .

A solução da eq. (4.2) pode ser obtida através de uma técnica numérica, aproximando as derivadas parciais por fórmulas de diferenças finitas, enquanto a concentração deve obedecer a determinadas condições de contorno.

Com esse procedimento obtem-se um sistema linear de equações, que pode ser colocado numa forma adimensional e resolvido segundo o esquema de Gauss-Seidel (14).

Após a obtenção da função  $C = C(r, \theta, z, t)$  é possível comparar o resultado experimental com a solução teórica.

Como a curva Concentração vs Tempo da experiência (ii) foi obtida tomando as medidas da concentração num ponto fixo  $(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z})$  do meio fluido, a solução teórica tomada neste ponto é  $C = C(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z}, t)$ , uma função apenas do tempo.

Dessa forma verifica-se a validade do modelo teórico sugerido.

A solução da eq. (4.2) não foi desenvolvida nesta tese. Esta tarefa foi deixada para trabalhos posteriores.

CAPITULO VII  
CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A utilização do Vento Acústico como um processo físico acelerador da difusão do  $KCl$  na água mostrou, através dos resultados experimentais, um aumento no rendimento da transferência de massa da ordem de 200%, ou seja, o Vento Acústico reduziu a um terço o tempo necessário para se atingir o estado de saturação da solução, em relação à difusão natural.

Esse resultado justifica o desenvolvimento de um trabalho no sentido de estabelecer se é economicamente viável a utilização do Vento Acústico na mineração de  $KCl$  em jazidas subterrâneas. Trata-se de construir um gerador de ultrasom compacto, capaz de concentrar energia suficiente em pontos distantes da fonte.

No trabalho experimental, aqui desenvolvido, não foi analisada a variação da concentração com a posição. Entretanto, utilizando o mesmo modelo físico é possível fazer tal verificação.

Esta análise fica como sugestão para trabalhos posteriores.

No desenvolvimento do modelo teórico a equação do Vento Acústico foi resolvida apenas na região  $\Sigma$ , junto à parede de sal.

Existe uma outra região do meio líquido onde aparecem circulações provocadas pela presença do campo acústico.

Esta região se encontra em torno do feixe acústico de primeira ordem (11).

Como o campo acústico analisado é estacionário, estas cir-

culações são periodicamente distribuídas segundo a direção  $z$ . Entre cada máximo e mínimo da velocidade de primeira ordem, existe uma circulação no sentido decrescente de  $\underline{u}_1$ , como esquematizado na Fig. (17).

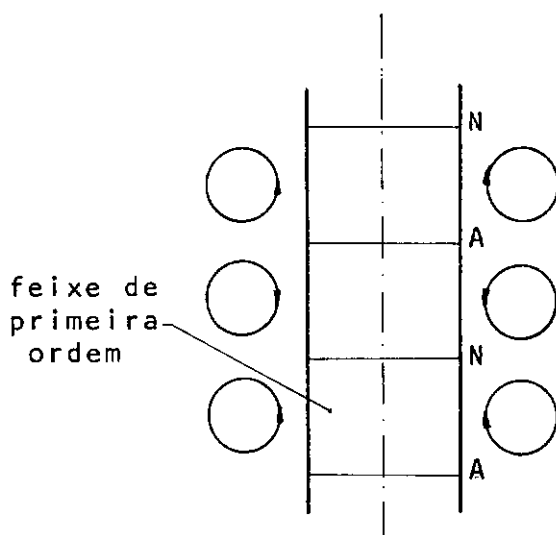


FIG. (17)

Esta circulação foi nitidamente observada durante as experiências por inclusão no meio líquido de pequenas partículas de folha de alumínio.

Em princípio parece ser importante a solução do problema do Vento Acústico nessa região, pois o fluxo nela gerado deve produzir um transporte de massa na direção  $z$ , normal à parede de sal.

Fora da região  $\Sigma$ , ou seja, longe da parede, o campo acústico estacionário é essencialmente irrotacional, e a velocidade  $\underline{u}_1$  tem componente apenas na direção  $z$ .

Para o mesmo sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , utilizado anteriormente, a velocidade de primeira ordem  $\underline{u}_1$  tem componentes  $(0, 0, w_{1a})$ , onde:

$$w_{1a} = W_0 \sin kz \cos \omega t \quad (7.1)$$

A eq. (7.1) satisfaz as condições de contorno:

$$w_{1a} = 0 \quad \text{em } z = 0 \quad \text{e } z = h$$

A velocidade de circulação pode ser calculada agora através das eqs. (2.3.5) e (7.1). Na eq. (2.3.5) o vetor  $\underline{F}$  tem componentes  $(0, 0, F_z)$ , com:

$$F_z = -2 \rho_0 \left\langle w_{1a} \frac{\partial w_{1a}}{\partial z} \right\rangle = W_0^2 k \sin 2kz \quad (7.2)$$

A equação do Vento Acústico toma a forma:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = K - \rho_0 W_0^2 k \sin 2kz \quad (7.3)$$

onde  $K = \frac{\partial p_2}{\partial z}$  é uma constante.

A solução da eq. (7.3) pode ser obtida pela soma de duas soluções particulares, uma fazendo  $K = 0$  e  $F_z \neq 0$ , e a outra tomando  $K \neq 0$  e  $F_z = 0$ .

O desenvolvimento dessas soluções fica como sugestão para trabalhos posteriores.

No problema da mineração do  $KCl$  o transporte da solução em região afastada da parede é predominantemente feito por convexão forçada causada pelo bombeamento.

Nesta região, deste problema particular, não se deve esperar uma contribuição significativa do vento acústico, ao transporte de massa.



## BIBLIOGRAFIA

- ( 1) HUNDLEY JR., C.L. - "Process of Underground salt Recovery" - U.S. PATENT nº 3,405,974 - (1968).
- ( 2) DAHMS, J.B. - "Method of Solution Mining Potassium Chloride" - U.S. PATENT nº 3,433,530 - (1969).
- ( 3) PASTERNAK, I.S. - "Process for Solution Mining KCl Deposits" - U.S. PATENT nº 3,366,419 - (1968).
- ( 4) EDMONDS, B.P. - "Solution mining of Potassium Chloride" - U.S. PATENT nº 3,262,741 - (1966).
- ( 5) FARADAY, M. - Phil. Trans. Roy. Soc. London 121 - 229- (1831).
- ( 6) ANDRADE, E.N. - Proc. Roy. Soc. A134 - 445 (1931).
- ( 7) HOLTZMARK, J. - J. Acoust. Soc. Am. 26 - 26 (1954).
- ( 8) NYBORG, W.L. - J. Acoust. Soc. Am. 28 - 1237 (1956).
- ( 9) JACKSON, F.J. - J. Acoust. Soc. Am. 32 - 1387 (1960).
- (10) LORD RAYLEIGH - Phil. Trans. Roy. Soc. London 175 - 1 (1884).  
- "Theory of Sound" parágrafo 352 - DOVER, N.Y. (1945).
- (11) MASON, W.P. - "Physical Acoustics" - Mac Graw Hill, vol. II - part B - pg. 273 (1955).
- (12) MARKHAM, J.J. - Phys. Rev. 86 - 497 (1952).

- (13) NYBORG, W.L.            - J. Acoust. Soc. Am. 30 - 329 (1958).
- (14) FOGLER e LUND        - J. Acoust. Soc. Am. 53 - 59 (1973).
- (15) BIRD                   - "Transport Fenomena", John Wiley & Sons,  
pg. 557 (1964).
- (16) KINSLER e FREY       - "Fundamentals of Acoustics" - John Wiley  
& Sons INC - pg. 340 (1962).

# APENDICE A

## CALIBRAÇÃO DO ELETROPHORETIC MASS TRANSPORT ANALYSER

As medidas de concentração foram obtidas, nas experiências (i) e (ii), através de sua correlação com a resistência elétrica da solução contida entre os dois eletrodos enegrecidos de platina.

A calibração destes eletrodos, para soluções de  $KCl-H_2O$ , foi conseguida a partir de medidas da resistência, em  $\Omega$ , de soluções de concentração, em gramas/litro, previamente determinadas.

Os dados de calibração estão representados na Tabela I, enquanto a curva  $R(\Omega)$  vs  $C(\text{gr/l})$  encontra-se na Fig. (A).

TABELA I - Electrophoretic Mass Transport Analyser

Volume de teste - 800 ml

Temperatura - 20°C

Solução -  $KCl$  em água

massa(gr)	R ( $\Omega$ )	C(gr/l)	massa(gr)	R( $\Omega$ )	C(gr/l)
0,08	5840	0,100	0,96	467	1,200
0,16	2760	0,200	1,04	432	1,300
0,24	1860	0,300	1,20	382	1,500
0,32	1375	0,400	1,40	329	1,750
0,40	1120	0,500	1,60	288	2,000
0,48	925	0,600	1,80	258	2,250
0,56	795	0,700	2,00	234	2,500
0,64	690	0,800	2,50	188	3,125
0,72	612	0,900	3,00	164	3,750
0,80	562	1,000	3,50	139	4,375

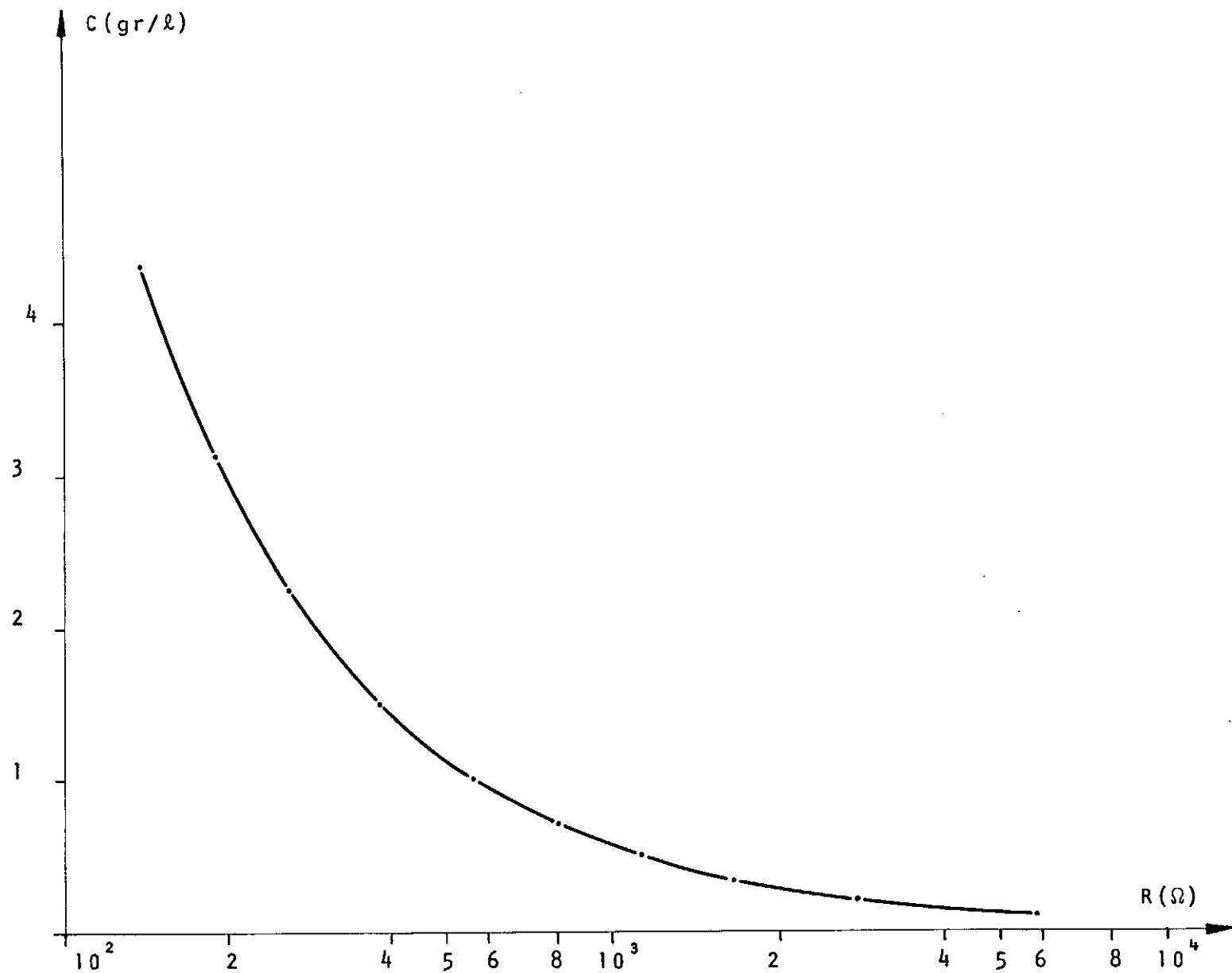


FIG. (A) - Eletrophoretic Mass Transport Analyser.

APENDICE BCALIBRAÇÃO DO BLACKSTONE MODELO BP-2

A calibração desse conjunto de aparelhos, responsáveis pela produção do campo acústico, foi necessária para a determinação da amplitude da velocidade da face livre da "tip de  $\frac{1}{2}$  polegada de diâmetro.

A montagem esquematizada na Fig.(B) possibilitou essa calibração.

Para medir a amplitude da face livre do transformador de velocidade utilizou-se um transdutor capacitivo de marca B & K, modelo MM 0004, ligado a um conjunto medidor Cathode Follower- Measuring Amplifier, ambos de marca B & K.

Como o transformador de velocidade é de titânio, material ao qual o transdutor MM 0004, não é sensível, foi necessário colar um disco de aço na extremidade de "tip".

É conhecida a sensibilidade do transdutor MM 0004. Para uma distância  $d=0,5$  mm, entre o disco de aço e a face livre do transdutor, a voltagem lida no Measuring Amplifier é  $V=0,9$  volts e corresponde a uma amplitude de deslocamento  $s=0,1$  mm. Então:

$$s = \frac{0,1 \text{ V}}{0,9} = \frac{V}{9} \quad (b.1)$$

Para as leituras feitas no ar, a amplitude da velocidade da face livre do transformador de velocidade é obtida através da relação:

$$\underline{u} = \frac{ds}{dt} \quad \text{ou} \quad u = \omega s$$

Como  $\omega = 2\pi \cdot 20.000$  tem-se:

$$u = (12,56 \cdot 10^4) \text{ s} \quad (\text{b.2})$$

A amplitude da velocidade deve ser determinada quando o meio fluido é a água.

A partir da velocidade no ar,  $u_{\text{ar}}$ , pode-se determinar, analiticamente, a velocidade na água  $u_{\text{agua}}$ , através das relações entre as impedâncias acústicas dos meios ar e água (16).

A potência fornecida pode ser expressa por:

$$W_{\text{ar}} = (\rho c)_{\text{ar}} u_{\text{ar}}^2 S \quad (\text{b.3})$$

$$\text{e} \quad W_{\text{agua}} = (\rho c)_{\text{agua}} u_{\text{agua}}^2 S \quad (\text{b.4})$$

onde  $\rho$  é a densidade do meio,  $c$  é a velocidade de propagação da onda compressional e  $S$  é a área da superfície emissora.

Tomando a relação das eqs. (b.3) e (b.4):

$$u_{\text{agua}} = \frac{(\rho c)_{\text{ar}}}{(\rho c)_{\text{agua}}} \cdot u_{\text{ar}} \quad \text{ou}$$

$$u_{\text{agua}} = 1,34 \cdot 10^{-2} u_{\text{ar}} \quad (\text{b.5})$$

Utilizando as eqs. (b.1), (b.2) e (b.5) determinou-se a amplitude da velocidade para diferentes níveis de amplificação. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela II.

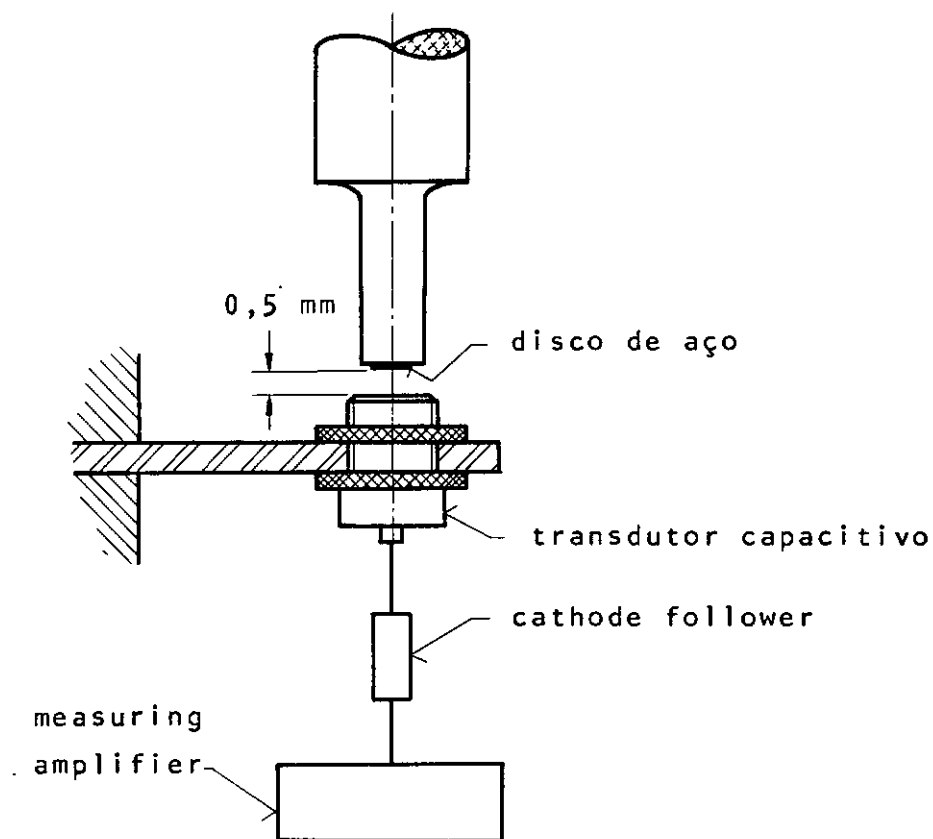


FIG.(B) - Esquema da Calibração.

TABELA II - Calibração do Blackstone Modelo BP-2				
Potência	Voltagem	Deslocamento	Velocidade	Velocidade
(%)	(mV)	(mm) $\cdot 10^{-3}$	no ar (cm/s)	na água (cm/s)
10	10,20	1,13	14,19	0,150
20	10,25	1,14	14,32	0,192
30	10,30	1,16	14,57	0,195
40	10,60	1,17	14,69	0,197
50	10,70	1,18	14,82	0,199
60	10,75	1,19	14,95	0,201
70	10,80	1,20	15,07	0,203
80	10,90	1,21	15,19	0,205
90	11,00	1,22	15,32	0,207
100	11,50	1,27	15,95	0,214

APENDICE C  
RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os dados experimentais, aqui apresentados, foram utilizados na construção das curvas da Fig. (13).

Na Tabela III encontram-se os resultados da experiência (i), enquanto a Tabela IV retrata a experiência (ii).

TABELA III - Difusão Natural

Experiência (i)

Temperatura 20°C

Volume de teste 800 ml.

T(min)	R( $\Omega$ )	C(gr/l)	T(min)	R( $\Omega$ )	C(gr/l)
001	2000	0,280	260	559	1,000
010	1960	0,290	290	451	1,250
040	1878	0,300	320	370	1,575
055	1735	0,325	350	325	1,763
070	1615	0,340	380	283	1,975
080	1580	0,358	410	246	2,325
095	1529	0,370	430	205	2,850
110	1402	0,395	450	187	3,175
125	1305	0,425	465	179	3,250
150	1215	0,463	480	173	3,450
160	1110	0,500	495	168	3,600
170	1010	0,550	510	162	3,750
185	915	0,588	525	158	3,850
205	785	0,695	720	145	4,170
230	650	0,838	900	142	4,375



TABELA IV - Difusão e Vento Acústico

Experiência (ii)

Temperatura 20°C

Volume de teste 800 ml

Intensidade acústica 5,52 watts/m<sup>2</sup>

T(min)	R(Ω)	C(gr/ℓ)		T(min)	R(Ω)	C(gr/ℓ)
001	2000	0,280		145	592	0,925
005	1912	0,295		155	550	1,000
010	1745	0,325		165	520	1,080
015	1600	0,350		170	492	1,125
025	1455	0,383		175	463	1,200
030	1393	0,400		185	422	1,325
040	1275	0,438		200	336	1,700
057	1170	0,475		212	275	2,103
070	1080	0,520		220	260	2,200
080	975	0,565		230	215	2,720
090	885	0,625		235	198	2,900
105	795	0,690		240	180	3,325
115	732	0,760		250	146	4,175
125	680	0,807		275	143	4,350
135	630	0,875		360	142	4,375